Universität des Saarlandes
FR 6.1 Mathematik
Prof. Dr. G. Weitze-Schmithüsen
M.Sc. C. Steinhart

1. Übungsblatt zur Algebra

Während des gesamten Blattes bezeichne K einen Körper und $\overline{K}$ den algebraischen Abschluss von K.

Aufgabe 1. (2P+1P+1P)

Sei $L|K$ eine Körpererweiterung, $\alpha \in L \setminus K$ algebraisch über K und $k \in K \setminus \{0\}$. Weiterhin sei $\beta := \alpha + k$.

a) Zeige, dass auch β algebraisch über K ist (und damit das Minimalpolynom von β existiert).
Seien nun f_α und f_β jeweils die Minimalpolynome von α bzw. β und $\mathrm{char(K)} = 0$.
Zeige, dass $\deg f_\alpha = \deg f_\beta$ aber $f_\alpha \neq f_\beta$ gilt.

b) Gib für $\mathrm{char(K)} \neq 0$ ein Beispiel mit $f_\alpha = f_\beta$ an.

c) Welche der Aussagen aus a) gelten auch für $\gamma = k\alpha$ für $k \neq 1$?

Aufgabe 2. (4P)

Bestimme jeweils den Grad der Erweiterung (natürlich wie immer mit Begründung):

a) $(\overline{\mathbb{F}_2} : \mathbb{F}_2)$

b) $(\overline{\mathbb{Q}} : \mathbb{Q})$

c) $(\overline{\mathbb{R}} : \mathbb{R})$

d) $(\mathbb{R} : \mathbb{Q})$

e) $(\mathbb{R}(X) : \mathbb{R})$ (mit $\mathbb{R}(X) := \mathrm{Quot}(\mathbb{R}[X])$)

f) $(\mathbb{C}(\sqrt[3]{X}) : \mathbb{R}(X))$

Aufgabe 3. (4P)

Sei K ein abzählbarer[1] Körper und $\overline{K}$ ein algebraischer Abschluss. Zeigen Sie, dass auch $\overline{K}$ abzählbar ist. Folgere daraus, dass jede algebraische Erweiterung von K abzählbar ist und insbesondere $\overline{\mathbb{Q}} \subsetneq \mathbb{C}$ gilt. Die Elemente $\mathbb{C} \setminus \overline{\mathbb{Q}}$ heißen transzendente Elemente (über $\mathbb{Q}$).

[1]: *Eine Menge M heißt abzählbar, wenn es eine surjektive Abbildung $\phi : \mathbb{N} \to M$ gibt. Insbesondere sind abzählbare Vereinigungen, Kreuzprodukte sowie endliche Folgen abzählbarer Mengen wieder abzählbar.*

Die Abgabe erfolgt immer in Gruppen bis zu vier Personen in den Abgabekästen im UG des Gebäudes 5. Die Namen und Matrikelnummern sämtlicher Gruppenmitglieder müssen auf dem Blatt stehen. Abgabe bis spätestens Mittwoch, den 03. 05. 2017 vor der Vorlesung.

Aufgabe 4. (4P)

Sei V ein K-Vektorraum, $v \in V$ und $\phi \in \mathrm{End}(V)$ ein K-Vektorraumendomorphismus von V. Sei weiterhin

$$U :=< \phi^0(v) := v, \phi(v), \phi^2(v), \phi^3(v), \ldots >$$

der kleinste ϕ-invariante Untervektorraum von V, der v enthält.
Wir definieren auf U die folgende Multiplikation. Für $a, b \in U$ mit

$$a = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i \phi^i(v), \quad b = \sum_{i=0}^{m} \beta_i \phi^i(v) \qquad (\alpha_0, \ldots, \alpha_n, \beta_0, \ldots, \beta_m \in K)$$

sei

$$a \cdot b := \sum_{i=0}^{n+m} (\sum_{j=0}^{i} \alpha_j \beta_{i-j}) \phi^i(v),$$

wobei wir $\alpha_i = 0$ und $\beta_j = 0$ für $i > n$ und $j > m$ setzen.
Damit wird U, zusammen mit der Addition als Vektorraum, zu einem kommutativen Ring (also sogar zu einer K-Algebra) mit 1.

a) Zeige, dass U mit der obigen Mulitplikation genau dann ein Körper ist, wenn U endlichdimensional und das charakteristische Polynom von $\phi_{|U}$ irreduzibel ist.

b) Zeige, dass ein Körper K genau dann algebraisch abgeschlossen ist, wenn für jeden endlichdimensionalen K-Vektorraum V und alle Endomorphismen $\phi \in \mathrm{End}(V)$ ein Eigenvektor in V existiert.

Hinweis: Die Multiplikation wird anschaulicher, wenn man einmal $a = \phi^i(v)$ und $b = \phi^j(v)$ betrachtet.

Aufgabe 5. (4 Sams-Punkte[2])

Bilde mit bis zu drei weiteren Personen eine Algebra-Arbeitsgruppe und gebt eurer Arbeitsgruppe einen Namen. Schreibt diesen (und die Namen und Matrikelnummern der Gruppenmitglieder) auf jede Abgabe.

[2]*: Damit kann man sich was wünschen. Wer weiß, vielleicht geht es sogar in Erfüllung.*

Die Abgabe erfolgt immer in Gruppen bis zu vier Personen in den Abgabekästen im UG des Gebäudes 5. Die Namen und Matrikelnummern sämtlicher Gruppenmitglieder müssen auf dem Blatt stehen. Abgabe bis spätestens Mittwoch, den 03. 05. 2017 vor der Vorlesung.