Universität des Saarlandes
FR 6.1 Mathematik
Prof. Dr. G. Weitze-Schmithüsen
M.Sc. C. Steinhart

10. Übungsblatt zur Algebra

Aufgabe 1. (4P)

Sei $L|K$ eine endliche Galois-Erweiterung.

a) Sei $H \leq \mathrm{Gal}(L|K)$ eine Untergruppe und L^H der zugehörige Fixkörper. Sei weiterhin $\{x_1, \ldots, x_n\} \subseteq L$ eine K-Vektorraum-Basis von L.
Zeige, dass dann bereits $L^H = K(SP_{L|L^H}(x_1), \ldots, SP_{L|L^H}(x_n))$ gilt.

b) Zeige, dass eine K-VR-Basis $\{x_1, \ldots, x_n\} \subseteq L$ von L mit $SP_{L|K}(x_i x_j) \neq 0 \iff i = j$ existiert.

Aufgabe 2. (4P)

a) Sei K ein Körper, $L = K(\alpha)$ eine einfache algebraische Körpererweiterung und $f \in K[X]$ das Minimalpolynom von α. Zeige, dass $f(x) = N_{L|K}(x - \alpha)$ für jedes $x \in K$ gilt.

b) Sei K ein endlicher Körper und L eine endliche Körpererweiterung. Was bzw. wie groß ist der Kern der Normabbildung $N_{L|K}$, d.h. das Urbild von 1_K? Was folgt daraus für das Bild?

Aufgabe 3. (4P)

Eine Gruppe G heißt perfekt, wenn sie bereits ihre Kommutatorgruppe $[G, G] = G$ ist.

a) Zeige, dass eine endliche Gruppe genau dann auflösbar ist, wenn ihre einzige perfekte Untergruppe bereits $\{e_G\}$ ist.

b) Zeige: Eine Gruppe ist genau dann perfekt, wenn sie nur den trivialen Charakter hat.
Hinweis: Für eine Untergruppe U von G und χ ein Charakter auf U. Was ist die maximale Untergruppe von G, auf der sich χ fortsetzen lässt? Benutze das Lemma von Zorn.

Aufgabe 4. (2P+2P+2 Bonuspunkte)

Sei G eine Gruppe und $[\cdot, \cdot]$ die Kommutatorklammer, d.h. für $g, h \in G$ ist $[g, h] = ghg^{-1}h^{-1}$.

a) Zeige anhand eines Beispiels, dass die Kommutatorklammer im Allgemeinen nicht assoziativ ist, d.h. gib eine Gruppe G und Elementen $f, g, h \in G$ an, für die $[f, [g, h]] \neq [[f, g], h]$ gilt.
Zeige, dass die Kommutatorklammer im folgenden Sinne antisymmetrisch ist:
Für alle $f, g \in G$ gilt $[f, g] = [g, f]^{-1}$.

b) Sei H eine weitere Gruppe und $\varphi : G \to H$ ein Gruppenhomomorphismus. Seien weiterhin $g_0, \ldots, g_n \in G$ und $x \in G$ ein Element, das durch n-faches Ausführen von Kommutatorklammern der g_i dargestellt wird, z.B. $x = [g_0, [[g_1, [g_2, g_3]], g_4], g_5]$ oder $x = [g_0, [g_1, [\ldots, [g_{n-1}, g_n]] \ldots]]$.
Zeige: Existiert ein $i \leq n$ mit $\varphi(g_i) = e_H$, so gilt bereits $\varphi(x) = e_H$.

Die Abgabe erfolgt immer in Gruppen bis zu vier Personen in den Abgabekästen im UG des Gebäudes 5. Die Namen und Matrikelnummern sämtlicher Gruppenmitglieder müssen auf dem Blatt stehen. Abgabe bis spätestens Mittwoch, den 05. 07. 2017 vor der Vorlesung.

c) Die Eule Ferdinand hat folgendes Problem: Er hängt sehr gerne seine Bilder daheim mit zwei Nägeln und einem Faden auf. Wenn aber seine Verwandtschaft zu Besuch kommt, klaut ihm immer jemand einen der beiden Nägel aus der Wand - er hat schon immer vermutet, dass seine Cousins dritten Grades eine Elster als Vorfahre haben. Da dieser Nageldiebstahl ihm aber langsam auf die Nerven und an den Nagelvorrat geht, überlegt er sich folgendes:

Er hängt seine Bilder so mit den zwei Nägeln und dem Faden auf, dass egal welchen Nagel man zieht, das Bild herunterfällt (die Länge des Fadens ist egal und der Faden hat auch keine Reibung o.ä.). Wie schafft er das? Schafft er das auch mit beliebig vielen Nägeln, um seinen Besuch noch mehr zum verderblichen Nagelziehen zu verlocken?