Universität des Saarlandes
FR 6.1 Mathematik
Prof. Dr. G. Weitze-Schmithüsen
M.Sc. C. Steinhart

11. Übungsblatt zur Algebra

Aufgabe 1. (4P)

a) Seien $p_1, \dots, p_n \in \mathbb{N}$ verschiedene Primzahlen und $r_1, \dots, r_n \in \mathbb{N}$ mit $p_1^{r_1} \cdot p_2^{r_2} \cdot \dots \cdot p_i^{r_i} < p_{i+1}$ für alle $i < n$. Zeige, dass jede Gruppe G der Ordnung $p_1^{r_1} \cdot \dots \cdot p_n^{r_n}$ auflösbar ist.

b) Zeige, dass jede Gruppe G mit Ordnung < 60 auflösbar ist, also A_5 in diesem Sinne eine (die) kleinste nicht auflösbare Gruppe ist.

Hinweis: In beiden Fällen hilft der Herr Sylow.

Aufgabe 2. (4P)

Sei $p \in \mathbb{N}$ eine Primzahl

a) Zeige, dass es ein separables, irreduzibles Polynom $f(X) \in \mathbb{Q}[X]$ von Grad p gibt, sodass der Zerfällungskörper L über $\mathbb{Q}$ Galoisgruppe S_p hat.
Hinweis: Beginne mit einem separablen (evtl. reduziblen) Polynom $h(X) \in \mathbb{Q}[X]$ mit genau zwei nicht reellen Nullstellen. Wenn man die Koeffizienten von $h(X)$ stetig verändert, verändert man auch die Nullstellen stetig. Benutze dies, um die Existenz eines irreduziblen Polynoms $f(X)$ mit denselben Eigenschaften wie $h(X)$ nachzuweisen. Zeige dann, dass der Zerfällungskörper von $f(X)$ Galoisgruppe S_p hat.

b) Sei K ein Körper, $f(X) \in K[X]$ ein irreduzibles, separables Polynom von Grad p und L der Zerfällungskörper von f.
Zeige: Ist L auflösbar, dann ist der Grad der Körpererweiterung $[L : K] \leq p^2 - p$.

Aufgabe 3. (4P)

Sei G eine Gruppe und Aut(G) ihre Automorphismengruppe (mit Hintereinanderausführung als Verknüpfung). Wir bezeichnen mit $\mathrm{Inn(G)} := \{\mathrm{k_g} \mid \mathrm{g} \in \mathrm{G} \text{ mit } \mathrm{k_g(h)} = \mathrm{ghg^{-1}}\} \subseteq \mathrm{Aut(G)}$, also die Menge der Konjugationsen, als die *inneren Automorphismen* von G. Wie immer bezeichne $[G, G]$ die Kommutatoruntergruppe von G und $G^{ab} = G/[G, G]$ die Abelisierung.

a) Zeige, dass Inn(G) ein Normalteiler von Aut(G) ist. Man nennt $\mathrm{Out(G)} := \mathrm{Aut(G)}/\mathrm{Inn(G)}$ auch die *äußeren Morphismen* von G.

b) Berechne $\mathrm{Out}(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})$ und $\mathrm{Out(S_3)}$.

c) Zeige, dass sich jeder Automorphismus $\phi \in \mathrm{Aut(G)}$ fortsetzen lässt zu einem Automorphsmus $\pi^*(\phi) : G^{ab} \to G^{ab}$, $\bar{g} \mapsto \phi(g)$. Zeige weiterhin, dass $\pi^*(\phi) = id_{G^{ab}}$ für jedes $\phi \in Inn(G)$ gilt, wir also insbesondere einen wohldefinierten Gruppenhomomorphismus $\pi^* : \mathrm{Out(G)} \to \mathrm{Aut(G^{ab})}$, $\phi \mapsto \pi^*(\phi)$ erhalten.

Die Abgabe erfolgt immer in Gruppen bis zu vier Personen in den Abgabekästen im UG des Gebäudes 5. Die Namen und Matrikelnummern sämtlicher Gruppenmitglieder müssen auf dem Blatt stehen. Abgabe bis spätestens Mittwoch, den 12. 07. 2017 vor der Vorlesung.

Aufgabe 4. (4P)

Wir definieren für eine Primzahl p den *p-adischen Betrag* $|\cdot|_p$ auf $\mathbb{Q}$ wie folgt:
Sei $x \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$, dann lässt sich $x = p^n \frac{r}{s} \in \mathbb{Q}$ mit $r, s, n \in \mathbb{Z}$ und r, s, p teilerfremd schreiben. Wir setzen dann $|x|_p := p^{-n}$ und $|0|_p = 0$. Wie in der Analysis liefert uns dieser Betrag eine Metrik und wir können damit einen analytischen Abschluss, d.h. den Körper in dem alle Cauchy-Folgen von $\mathbb{Q}$ bezüglich $|\cdot|_p$ konvergieren, bilden. Dieser wird *der Körper der p-adischen Zahlen* genannt und mit $\mathbb{Q}_p$ bezeichnet.

a) Sei nun $p = 5$. Zeige, dass $i = \sqrt{-1} \in \mathbb{Q}_5$ gilt, also eine Folge in $\mathbb{Q}$ (eigentlich sogar in $\mathbb{Z}$) existiert, die bezüglich dem p-adischen Betrag gegen i konvergiert.
Hinweis: Zeige mittels Induktion, dass eine konvergierende Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ganzer Zahlen, mit $(a_n)^2 = c_n \cdot 5^n - 1$ mit $c_n \in \mathbb{Z}$ existiert. Ein guter Ansatz hierzu wäre die rekursive Formel $a_n = b_n \cdot 5^n + a_{n-1}$. Folgere, dass die Folge (a_n) gegen eine Nullstelle von $f(X) = X^2 + 1$ konvergiert (d.h. zeige $|f(a_n)|_p \to 0$ und $|a_n - a_{n+k}|_p \to 0$ für $n \to \infty$).

b) Zeige, dass für jedes $n \in \mathbb{N}$ und Primzahl p keine n-te Wurzel von p in $\mathbb{Q}_p$ existiert.

Die Abgabe erfolgt immer in Gruppen bis zu vier Personen in den Abgabekästen im UG des Gebäudes 5. Die Namen und Matrikelnummern sämtlicher Gruppenmitglieder müssen auf dem Blatt stehen. Abgabe bis spätestens Mittwoch, den 12. 07. 2017 vor der Vorlesung.