Universität des Saarlandes
FR 6.1 Mathematik
Prof. Dr. G. Weitze-Schmithüsen
M.Sc. C. Steinhart

12. Übungsblatt zur Algebra

Aufgabe 1. (4P)

Sei $p \in \mathbb{N}$ eine Primzahl, wie auf letztem Blatt $|\cdot|_p$ der p-adische Betrag und die p-adischen Zahlen $\mathbb{Q}_p$ der analytische Abschluss von $\mathbb{Q}$ bezüglich $|\cdot|_p$.

a) Sei $f(X) \in \mathbb{Q}[X]$ ein Polynom. Zeige, dass $f : \mathbb{Q}_p \to \mathbb{Q}_p$, $x \mapsto f(x)$ eine wohldefinierte, stetige (bezüglich der von $|\cdot|_p$ induzierten Metrik/ bzw. Topologie) Abbildung ist.

b) Zeige, dass der Zwischenwertsatz für $\mathbb{Q}_p$ nicht gilt. D.h. für $a, b, x \in \mathbb{Q}, a < b$ und einer bezüglich $|\cdot|_p$ stetigen Funktion $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ mit $f(a) < x < f(b)$ existiert im Allgemeinen kein $c \in \mathbb{Q}_p$ mit $f(c) = x$.

Aufgabe 2. (4P)

Sei wieder $p \in \mathbb{N}$ eine Primzahl, $|\cdot|_p$ der p-adische Betrag und $\mathbb{Q}_p$ die p-adischen Zahlen.

a) Zeige (unabhängig von p), dass $\mathbb{Z}$ in $\mathbb{Q}_p$ nicht abgeschlossen ist. Der analytische Abschluss von $\mathbb{Z}$ (bezüglich $|\cdot|_p$) wird mit $\mathbb{Z}_p$ bezeichnet.

b) Zeige, dass $\mathbb{Z}_p$ als (abgeschlossene) Kugel um 0 geschrieben werden kann und ein Unterring von $\mathbb{Q}_p$ ist. Zeige, dass dies auch für jede abgeschlossene (additive) Untergruppe $U \subseteq \mathbb{Z}_p$ gilt.
Hinweis: Zeige zuerst für jedes Untergruppe U: Es existiert ein $k \in \mathbb{N}$, sodass für beliebige $\lambda_i \in \{0, 1, \ldots, p-1\}$ eine Folge $a_n := \sum_{i=k}^{n} \lambda_i p^i + c_n$ mit $|c_n|_p < p^{-n}$ in U liegt.

c) Sei $U \subseteq \mathbb{Z}_p$ eine (additive) Untergruppe. Zeige, dass U genau dann abgeschlossen ist, wenn $\mathbb{Z}_p/U \cong \mathbb{Z}/p^k\mathbb{Z}$ für ein $k \in \mathbb{N}$ gilt.

Aufgabe 3. (4P)

a) Sei $K \subseteq \mathbb{C}$ ein Körper und $L|K$ eine konstruierbare Körpererweiterung.
Zeige, dass auch die normale Hülle M von $L|K$ konstruierbar ist. Zeige weiterhin, ist $L|K$ eine endliche Körpererweiterung, dann ist $M|K$ auflösbar.

b) Gib jeweils mit einer kurzen Begründung an, wie viele Punkte in $\mathbb{C}$ man mindestens braucht, um folgende Mengen mit Zirkel und Lineal zu konstruieren:

(i) Die Eckpunkte eines regelmäßigen 42-Ecks.

(ii) Die Eckpunkte vom Haus des Nikolaus (mit Dachschräge 30°).

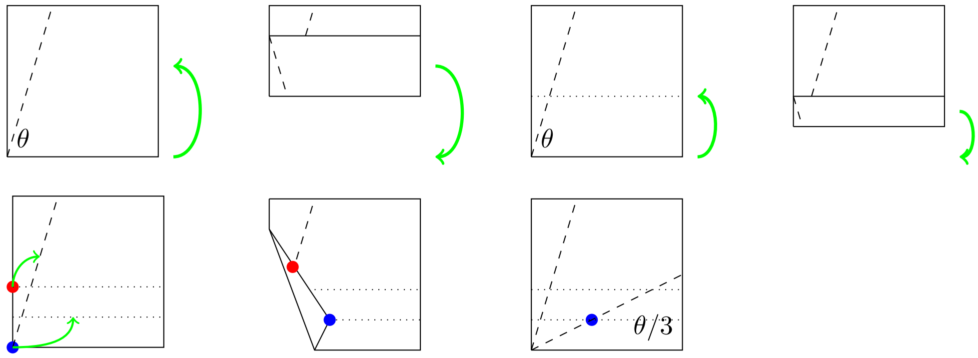
(iii) Den algebraischen Abschluss von $\mathbb{Q}$.

(iv) Den Körper $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{3}, \sqrt[4]{4}, \sqrt[5]{5})$.

Die Abgabe erfolgt immer in Gruppen bis zu vier Personen in den Abgabekästen im UG des Gebäudes 5. Die Namen und Matrikelnummern sämtlicher Gruppenmitglieder müssen auf dem Blatt stehen. Abgabe bis spätestens Mittwoch, den 19. 07. 2017 vor der Vorlesung.

Aufgabe 4. (4P)

Wir wollen nun einen beliebigen Winkel θ mittels Falten/Origamis dreiteilen. Sei dazu der Winkel $\theta < 90°$ wie bei Bild 1 als Winkel einer Geraden und der Grundseite gegeben. Wir falten entsprechend der Bilder:



Zuerst falten wir die untere Kante parallel nach oben und halbieren diese durch nochmaliges Falten (Bilder 1-4). Anschließend falten wir die linke Ecke so hinein, dass die Ecke (blauer Punkt) auf der unteren Parallelen liegt und der Endpunkt der oberen Parallele (roter Punkt) auf der Geraden von Winkel θ (Bilder 5 und 6). Wir markieren den Punkt, auf den die Ecke gefaltet wurden und falten wieder auf.
Zeige, dass die Gerade durch die Ecke und den markierten Punkt (Bild 7) den Winkel $\theta/3$ zur unteren Blattkante hat.
Hinweis: Verwende ähnliche Dreiecken.

Die Abgabe erfolgt immer in Gruppen bis zu vier Personen in den Abgabekästen im UG des Gebäudes 5. Die Namen und Matrikelnummern sämtlicher Gruppenmitglieder müssen auf dem Blatt stehen. Abgabe bis spätestens Mittwoch, den 19. 07. 2017 vor der Vorlesung.