Universität des Saarlandes
FR 6.1 Mathematik
Prof. Dr. G. Weitze-Schmithüsen
M.Sc. C. Steinhart

13. Übungsblatt zur Algebra

Aufgabe 1. (4P)

Sei $p \in \mathbb{N}$ eine Primzahl, wie immer $|\cdot|_p$ der p-adische Betrag und die p-adischen Zahlen $\mathbb{Z}_p$ der analytische Abschluss von $\mathbb{Z}$ bezüglich $|\cdot|_p$. Sei weiterhin K_0 ein endlicher Körper, für jedes $i \in \mathbb{N}$ $K_i|K_{i-1}$ eine Körpererweiterung von Grad p und $K = \cup_{i\in\mathbb{N}} K_i$.

a) Zeige, dass $K|K_0$ eine Galois-Erweiterung ist und der Gruppenhomomorphismus

$$\phi : \mathbb{Z}_p \to \mathrm{Gal}(K|K_0)\ ,\ \lambda := \sum_{i=0}^{\infty} \lambda_i p^i \mapsto \sigma_\lambda$$

ein Isomorphismus ist, wobei wir $\sigma_\lambda(x) = Frob^{c_j}(x)$ für $x \in K_j$ und $c_j := \sum_{i=0}^{j-1} \lambda_i p^i$ setzen.
Hinweis: Wie sieht $\sigma(x)$ für $\sigma \in \mathrm{Gal}(K|K_0)$ und $x \in K$ aus? Wie weit ist $\sigma|_{K_{i+1}}$ durch $\sigma|_{K_i}$ festgelegt? Benutze dies, um zu zeigen, dass ϕ surjektiv ist.

b) Sei U eine (additive) Untergruppe von $\mathbb{Z}_p$ und $\mathbb{Z}_p$ wie in a) mit $\mathrm{Gal}(K|K_0)$ identifiziert. Sei K^U der Fixkörper von K unter U.
Zeige, dass $\mathrm{Gal}(K|K^U) = \bar{U}$ der analytische Abschluss von U (bezüglich $|\cdot|_p$) ist.

Aufgabe 2. (4P)

Sei $p \in \mathbb{N}$ eine Primzahl, K und K_0 wie in Aufgabe 1 und $X = \mathbb{Z}_p = \mathrm{Gal}(K|K_0)$ mit der von $|\cdot|_p$ induzierten Topologie.

a) Für offene $V \subseteq U \subseteq X$ sei $\mathcal{F}(U) := \{k \in K \mid \sigma(k) = k\ \forall \sigma \in U\}$ und $\rho^U_V = id_{|\mathcal{F}(U)}$.
Zeige, dass $\mathcal{F}$ eine Garbe von Körpern definiert und bestimme für beliebiges $x \in X$ den Halm $\mathcal{F}_x$.

b) Für offene $V \subseteq U \subseteq X$ sei $\mathcal{G}(U) :=< U >$ die von U erzeugte (additive) Untergruppe und $\rho^U_V(x) = 0$ für $U \neq V$.
Zeige, dass $\mathcal{G}$ eine Prägarbe (von abelschen Gruppen) ist. Ist $\mathcal{G}$ auch eine Garbe?

Aufgabe 3. (1P+3P)

Seien $\mathcal{F}$ und $\mathcal{G}$ zwei Garben von abelschen Gruppen auf einem topologischen Raum X und $\phi : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ ein Garbenmorphismus. Für $x \in X$ sei $\phi_x : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ die induzierte Abbildung auf den Halmen.

a) Zeige: Ist ϕ_U für jedes offene $U \subseteq X$ ein Isomorphismus, dann ist auch $\phi^{-1} : \mathcal{G} \to \mathcal{F}$, $\phi_U^{-1} : \mathcal{G}(U) \to \mathcal{F}(U)\ ,\ f \mapsto \phi_U^{-1}(f)$ ein Garbenmorphismus. Wir sagen dann, ϕ ist ein Garbenisomorphismus.

b) Zeige: ϕ ist ein Isomorphismus $\iff$ ϕ_x ist für alle $x \in X$ ein Isomorphismus.
Hinweis: Zeige für die Rückrichtung, dass ϕ injektiv (etwas leichter zu zeigen) und surjektiv ist. Benutze hierbei die Eindeutigkeit und Existenz der Amalgamisierung und die Definition eines Keims.

Die Abgabe erfolgt immer in Gruppen bis zu vier Personen in den Abgabekästen im UG des Gebäudes 5. Die Namen und Matrikelnummern sämtlicher Gruppenmitglieder müssen auf dem Blatt stehen. Abgabe bis spätestens Mittwoch, den 26. 07. 2017 vor der Vorlesung.

Aufgabe 4. (4P)

Sei K ein Körper. Eine surjektive Abbildung $v : K \to \mathbb{Z} \cup \{\infty\}$ die folgende Eigenschaften

(i) $v(x \cdot y) = v(x) + v(y)$

(ii) $v(x + y) \geq \min\{v(x), v(y)\}$

(iii) $v(x) = \infty \iff x = 0_K$

für alle $x, y \in K$ erfüllt, heißt *diskrete Bewertung*. Sei v eine diskrete Bewertung auf K.

a) Zeige, dass $v_p : \mathbb{Q} \mapsto \mathbb{Z} \cup \infty$, $x \mapsto -\log_p(|x|_p)$ für eine Primzahl $p \in \mathbb{N}$ eine diskrete Bewertung auf $\mathbb{Q}$ ist.

b) Zeige, dass $\mathcal{O}_\mathcal{K} := \{x \in K \mid v(x) \geq 0\}$ ein Ring ist. Dieser wird *diskreter Bewertungsring* genannt. Zeige, dass die Einheiten in $\mathcal{O}_\mathcal{K}$ gerade die Elemente mit Bewertung 0 sind.

c) Zeige, dass $J := \{x \in K \mid v(x) > 0\} \subseteq \mathcal{O}_\mathcal{K}$ ein Hauptideal ist, d.h. es existiert ein $x \in \mathcal{O}_\mathcal{K}$ mit $J = \mathcal{O}_\mathcal{K} x$.

d) Zeige, dass jedes andere echte Ideal $I \subsetneq \mathcal{O}_\mathcal{K}$ in J enthalten ist (insbesondere ist dann J das einzige maximale Ideal in $\mathcal{O}_\mathcal{K}$).

Die Abgabe erfolgt immer in Gruppen bis zu vier Personen in den Abgabekästen im UG des Gebäudes 5. Die Namen und Matrikelnummern sämtlicher Gruppenmitglieder müssen auf dem Blatt stehen. Abgabe bis spätestens Mittwoch, den 26. 07. 2017 vor der Vorlesung.