Universität des Saarlandes
FR 6.1 Mathematik
Prof. Dr. G. Weitze-Schmithüsen
M.Sc. C. Steinhart

2. Übungsblatt zur Algebra

Während des gesamten Blattes bezeichne K einen Körper und $\overline{K}$ den algebraischen Abschluss von K.

Aufgabe 1. (4P)

Gib jeweils die Menge der K-linearen Körperhomomorphismen von L_1 nach L_2 an. Welche davon sind Körperisomorphismen?

a) $K = \mathbb{Q}, \quad L_1 = L_2 = \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt[3]{3})$

b) $K = \mathbb{F}_2, \quad L_1 = \mathbb{F}_2[X]/(X^3 + X + 1), \quad L_2 = \mathbb{F}_2[X]/(X^3 + X^2 + 1)$

c) $K = \mathbb{F}_2, \quad L_1 = \mathbb{F}_2[X]/(X^3 + X + 1), \quad L_2 = \mathbb{F}_2[X]/(X^6 + X^5 + 1)$

d) $K = \mathbb{Q}, \quad L_1 = \mathbb{Q}(X^2), \quad L_2 = \mathbb{Q}(X)$

Aufgabe 2. (4P)

Seien $K \subseteq L \subseteq M$ Körpererweiterungen. Zeige oder widerlege folgende Aussagen:

a) Ist M ein Zerfällungskörper von K, dann ist M auch ein Zerfällungskörper von L.

b) Ist M ein Zerfällungskörper von L und L ein Zerfällungskörper von K, dann ist auch M ein Zerfällungskörper von K.

Aufgabe 3. (4P)

Bestimme zu jedem Körper K und $f(X) \in K[X]$ den Zerfällungskörper von f über K und den Grad der Körpererweiterung:

a) $K = \mathbb{Q}, \quad f(X) = (X^4 - 4)(X^3 - 3)(X^2 - 2)(X - 1)$

b) $K = \mathbb{F}_5, \quad f(X) = (X^4 - 4)(X^3 - 3)(X^2 - 2)(X - 1)$

c) $K = \mathbb{Q}(t), \quad f(X) = X^3 + t$

d) $K = \mathbb{C}(t), \quad f(X) = X^3 + t$

Aufgabe 4. (4P)

Sei $L|K$ eine Körpererweiterung von Grad $d \in \mathbb{N}$.

a) Zeige, dass L isomorph zu einem Teilring im Matrizenring $\mathrm{Mat}(d \times d, K)$ ist.

b) Sei nun $K = \mathbb{F}_7$ und $\alpha, \beta \in \overline{K}$ Nullstellen von $(X^3 - 2)$ bzw. $(X^2 + X - 1)$ in $K[X]$. Bestimme das Minimalpolynom von $\alpha \cdot \beta$ über K.

Die Abgabe erfolgt immer in Gruppen bis zu vier Personen in den Abgabekästen im UG des Gebäudes 5. Die Namen und Matrikelnummern sämtlicher Gruppenmitglieder müssen auf dem Blatt stehen. Abgabe bis spätestens Mittwoch, den 10. 05. 2017 vor der Vorlesung.