Universität des Saarlandes
FR 6.1 Mathematik
Prof. Dr. G. Weitze-Schmithüsen
M.Sc. C. Steinhart

3. Übungsblatt zur Algebra

Während des gesamten Blattes bezeichne K einen Körper und $\overline{K}$ den algebraischen Abschluss von K.

Aufgabe 1. (4P)

Sei K ein Körper mit Charakteristik $p \neq 0$.

a) Sei $\alpha \in \overline{K}$ ein inseparables Element über K.
Zeige, dass α transzendent über $\mathbb{F}_p$ ist, d.h α ist nicht algebraisch über $\mathbb{F}_p$.

b) Seien $f_1, \ldots, f_n \in K[X]$ paarweise verschiedene, normierte, irreduzible Polynome und ihr Produkt $f := \prod_{i=1}^{n} f_i = \sum_{i=0}^{m} \alpha_i X^i \in K[X]$ inseparabel.
Zeige, dass mindestens einer der Koeffizienten α_i transzendent über $\mathbb{F}_p$ ist.

Aufgabe 2. (4P)

Seien $K \subseteq L \subseteq M$ algebraische Körpererweiterungen. Zeige oder widerlege folgende Aussagen:

a) Ist $M|K$ separabel, dann sind $M|L$ und $L|K$ separabel.

b) Sind $M|L$ und $L|K$ separabel, dann ist auch $M|K$ separabel.

Aufgabe 3. (4P)

Seien $p, q \in \mathbb{N}$ zwei teilerfremde, ungerade Primzahlpotenzen.
Untersuche folgende Körpererweiterungen auf Normalität und Separabilität:

a) $\mathbb{R}(\sqrt[p]{t}) \mid \mathbb{R}(t)$

b) $\mathbb{F}_p(\sqrt[p]{t}) \mid \mathbb{F}_p(t)$

c) $\mathbb{F}_q(\sqrt[p]{t}) \mid \mathbb{F}_q(t)$

d) $\mathbb{F}_p(\sqrt[p]{q}) \mid \mathbb{F}_p$

Aufgabe 4. (4P)

Sei $L|K$ eine algebraische Körpererweiterung und $\alpha \in L$ inseparabel und insbesondere eine n-fache Nullstelle seines Minimalpolynoms f_α.
Zeige, dass es ein separables $\beta \in L$ gibt, sodass α eine Nullstelle von $h(X) := X^n - \beta \in K(\beta)[X]$ ist. Was sind die anderen Nullstellen von $h(X)$ und ist $h(X)$ irreduzibel?

Hinweis: Wie sieht f_α aus? Wie würde das Minimalpolynom von solch einem β aussehen?

Die Abgabe erfolgt immer in Gruppen bis zu vier Personen in den Abgabekästen im UG des Gebäudes 5. Die Namen und Matrikelnummern sämtlicher Gruppenmitglieder müssen auf dem Blatt stehen. Abgabe bis spätestens Mittwoch, den 17. 05. 2017 vor der Vorlesung.