Universität des Saarlandes
FR 6.1 Mathematik
Prof. Dr. G. Weitze-Schmithüsen
M.Sc. C. Steinhart

4. Übungsblatt zur Algebra

Während des gesamten Blattes bezeichne K einen Körper, $\overline{K}$ den algebraischen Abschluss von K sowie $L|K$ und $M|L$ Körpererweiterungen.

Aufgabe 1. (4P)

Sei $M|K$ eine algebraische Körpererweiterung.

a) Zeige, dass ein eindeutiger Zwischenkörper $K \subseteq L \subseteq M$ existiert, sodass $L|K$ separabel und $M|L$ rein inseparabel ist. Zeige weiterhin, dass wenn $M|K$ normal ist, dass dann auch $L|K$ normal ist.

b) Sei nun L ein Zwischenkörper, also $K \subseteq L \subseteq M$. Zeige oder widerlege folgende Aussagen:

(i) Ist $M|K$ rein inseparabel, dann sind $M|L$ und $L|K$ rein inseparabel.

(ii) Sind $M|L$ und $L|K$ rein inseparabel, dann ist auch $M|K$ rein inseparabel.

Aufgabe 2. (4P)

Sei $L|K$ eine algebraische Körpererweiterung, $\alpha \in L$ und $f \in L[X]$. Wir definieren:

$$M(\alpha) := \{\sigma(\alpha) \mid \sigma \in \mathrm{Hom}_K(L, \overline{K})\} \quad , \quad M(f) := \{f^\sigma \mid \sigma \in \mathrm{Hom}_K(L, \overline{K})\}$$

als die Menge der Bilder von α, bzw. f in $\overline{K}$ bzw. $\overline{K}[X]$.

a) Zeige, dass $M(\alpha)$ und $M(f)$ endlich sind. Wie viele Elemente sind jeweils enthalten?

b) Zeige, dass für separables $L|K$

$$\prod_{\sigma(\alpha)\in M(\alpha)} \sigma(\alpha) \quad , \quad \sum_{\sigma(\alpha)\in M(\alpha)} \sigma(\alpha) \quad \in K$$

$$\text{sowie} \quad \prod_{f^\sigma \in M(f)} f^\sigma \quad , \quad \sum_{f^\sigma \in M(f)} f^\sigma \quad \in K[X]$$

gilt. Was geht schief, wenn die Körpererweiterung inseparabel ist?

Aufgabe 3. (4P)

Sei $L|K$ eine algebraische Körpererweiterung.
Zeige, dass L genau dann algebraisch abgeschlossen ist, wenn jedes $f \in K[X]$ in L eine Nullstelle besitzt.
Hinweis: Zeige zuerst die Aussage für normales $L|K$. Zeige für separables $L|K$ mit obigen Eigenschaften, dass $L|K$ normal ist. Folgere dann die Behauptung für beliebige Körpererweiterungen.

Die Abgabe erfolgt immer in Gruppen bis zu vier Personen in den Abgabekästen im UG des Gebäudes 5. Die Namen und Matrikelnummern sämtlicher Gruppenmitglieder müssen auf dem Blatt stehen. Abgabe bis spätestens Mittwoch, den 24. 05. 2017 vor der Vorlesung.

Aufgabe 4. (4P)

Sei $L|K$ eine Körpererweiterung. Eine Menge $A \subseteq L$ heißt *algebraisch unabhängig* über K, falls für jedes $n \in \mathbb{N}$ und paarweise verschiedene $a_1, \dots, a_n \in A$ kein Polynom $0 \neq f \in K[X_1, \dots, X_n]$ mit $f(a_1, \dots, a_n) = 0$ existiert.

a) Gib jeweils mit einer kurzen Begründung an, ob A über K algebraisch unabhängig ist.

   (i) $K = \mathbb{Q}, A = \{XY, X^2, Y^3\}, L = \mathbb{Q}(X, Y)$

   (ii) $K = \mathbb{R}, A = \{X_1, \sqrt{X_2}, \sqrt[3]{X_3}, \dots, \sqrt[n]{X_n}, \dots\}, L = \overline{\mathbb{R}(X_1, X_2, \dots)}$

b) Zeige, dass eine Menge A genau dann algebraisch unabhängig über K ist, wenn für je zwei Mengen $B \subsetneq C \subseteq A$ die Körpererweiterung $K(C)|K(B)$ transzendent ist.

c) Eine algebraisch unabhängige Menge A heißt *Transzendenzbasis* von $L|K$, wenn sie maximal algebraisch unabhängig ist, d.h. für jedes Element $\alpha \in L$ ist $A \cup \{\alpha\}$ algebraisch abhängig. Zeige, dass eine algebraisch unabhängige Menge A genau dann eine Transzendenzbasis von $L|K$ ist, wenn $L|K(A)$ eine algebraische Erweiterung ist. Zeige weiterhin, dass solch eine Transzendenzbasis immer existiert.

d) Zeige, dass genau dann eine n-elementige algebraisch unabhängige Menge A existiert, wenn ein injektiver Ringhomomorphismus $\phi : K[X_1, \dots, X_n] \to L$ existiert.

Die Abgabe erfolgt immer in Gruppen bis zu vier Personen in den Abgabekästen im UG des Gebäudes 5. Die Namen und Matrikelnummern sämtlicher Gruppenmitglieder müssen auf dem Blatt stehen. Abgabe bis spätestens Mittwoch, den 24. 05. 2017 vor der Vorlesung.