Universität des Saarlandes
FR 6.1 Mathematik
Prof. Dr. G. Weitze-Schmithüsen
M.Sc. C. Steinhart

5. Übungsblatt zur Algebra

Aufgabe 1. (4P)

Sei $L|K$ eine Körpererweiterung.

a) Seien A und B endliche Transzendenzbasen (s. letztes Übungsblatt) von $L|K$.
Zeige, dass $|A| = |B|$ gilt. $[L : K]_{tr} := |A|$ nennt man dann den *Transzendenzgrad von* $L|K$.
Hinweis: Versuche nach und nach Elemente von A durch Elemente von B zu ersetzen.

b) Zeige, dass der Transzendenzgrad additiv ist, d.h. für eine weitere Körpererweiterung $M|L$ gilt $[M : K]_{tr} = [M : L]_{tr} + [L : K]_{tr}$.

Aufgabe 2. (4P)

Sei $L|K$ eine endliche galoissche Körpererweiterung und E ein Zwischenkörper.

a) Ist die folgende Aussage richtig oder falsch?
Der Index von $\mathrm{Gal}(L/E)$ in $\mathrm{Gal}(L/K)$ ist der Grad der Körpererweiterung $E|K$, d.h.: $[\mathrm{Gal}(L/K) : \mathrm{Gal}(L/E)] = [E : K]$.

b) Zeige: Ist $\mathrm{Gal}(L/E)$ ein Normalteiler von $\mathrm{Gal}(L/K)$, dann ist $E|K$ normal.

Aufgabe 3. (4P)

Bestimme die Galois-Gruppe der folgenden Polynome:

a) $f(X) = X^3 + 6X^2 + 11X + 7 \in \mathbb{Q}[X]$

b) $g(X) = X^4 + 2X^2 - 2 \in \mathbb{Q}[X]$

c) $h(X) = X^4 - X^2 - 3 \in \mathbb{F}_5[X]$

Aufgabe 4. (4P)

Ein Polynom $f = a_nX^n + a_{n-1}X^{n-1} + \ldots + a_0 \in \mathbb{Q}[X]$ heißt *reziprok*, falls gilt $a_{n-k} = a_k$ für $k \in \{0, \ldots, n\}$.

a) Zeige für reziprokes f: Ist $\alpha \neq 0$ Nullstelle von f, dann auch $\frac{1}{\alpha}$. Ist n ungerade, dann ist -1 eine Nullstelle von f. Ist $n = 2k$ gerade, dann gibt es ein Polynom $q \in \mathbb{Q}[X]$ mit $f(X) = X^k \cdot q(X + \frac{1}{X})$.

b) Betrachte nun ein reziprokes irreduzibles Polynom $X^4 + aX^3 + bX^2 + aX + 1$ von Grad 4. Seien α, $\frac{1}{\alpha}$, β, $\frac{1}{\beta}$ die vier Nullstellen von f in $\overline{\mathbb{Q}}$ und $L = Z(f) = \mathbb{Q}(\alpha, \frac{1}{\alpha}, \beta, \frac{1}{\beta})$ der Zerfällungskörper von f. Zeige für den Zwischenkörper $E_1 = \mathbb{Q}(\alpha + \frac{1}{\alpha})$ von $L|\mathbb{Q}$:
$$E_1 = \mathbb{Q}(\alpha + \frac{1}{\alpha}) = \mathbb{Q}(\beta + \frac{1}{\beta}) = \mathbb{Q}(\sqrt{a^2 - 4(b-2)}).$$
Zeige: Die Anzahl der Elemente von $\mathrm{Gal}(L/\mathbb{Q})$ ist eine Zweierpotenz. Genauer ist $\mathrm{Gal}(L/\mathbb{Q})$ isomorph zu $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$, zur Kleinschen Vierergruppe V_4 oder zur Diedergruppe D_4.

Die Abgabe erfolgt immer in Gruppen bis zu vier Personen in den Abgabekästen im UG des Gebäudes 5. Die Namen und Matrikelnummern sämtlicher Gruppenmitglieder müssen auf dem Blatt stehen. Abgabe bis spätestens Mittwoch, den 31. 05. 2017 vor der Vorlesung.