Universität des Saarlandes
FR 6.1 Mathematik
Prof. Dr. G. Weitze-Schmithüsen
M.Sc. C. Steinhart

6. Übungsblatt zur Algebra

Während des gesamten Blattes bezeichne R einen kommutativen Ring mit Eins.

Aufgabe 1. (4P)

Schreibe das Polynom $T_1^3 + T_2^3 + T_3^3 \in R[T_1, T_2, T_3]$ als Polynom in elementarsymmetrischen Polynomen.

Aufgabe 2. (4P)

Zeige, für die folgenden Polynome f, dass Δ_f jeweils die Diskriminante ist:

a) $f(X) = X^2 + aX + b$ und $\Delta_f = a^2 - 4b$

b) $f = X^m + aX + b$ für $m \geq 2$ und $\Delta_f = \lambda(m)a^m + \mu(m)b^{m-1}$, wobei $\lambda(m), \mu(m) \in \mathbb{Z}$ nur von m abhängen.
Hinweis: $\Delta_n(s_1, \ldots, s_n)$ ist als Polynom in $T_1, \ldots, T_n$ homogen. Von welchem Grad? Welche Monome in s_{n-1}, s_n treten in $\Delta(0, \ldots, 0, s_{n-1}, s_n)$ auf?
Bestimme $\lambda(3)$ und $\mu(3)$ durch geschicktes Einsetzen von Werten für $T_1, \ldots, T_n$.

Aufgabe 3. (4P)

Sei wie auf dem letzten Übungsblatt $f(X) = X^4 + aX^3 + bX^2 + aX + 1$ ein reziprokes Polynom von Grad 4, α, $\frac{1}{\alpha}$, β, $\frac{1}{\beta}$ seine vier Nullstellen in $\overline{\mathbb{Q}}$ und $L = Z(f) = \mathbb{Q}(\alpha, \beta)$ der Zerfällungskörper von f. Betrachte die drei Zwischenkörper:

$$E_1 = \mathbb{Q}(\alpha + \frac{1}{\alpha}), E_2 = \mathbb{Q}((\alpha + \beta) \cdot (\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta})) \text{ und } E_3 = \mathbb{Q}(\alpha\beta^2 + \beta\alpha^{-2} + \alpha^{-1}\beta^{-2} + \beta^{-1}\alpha^2).$$

a) Zeige: Falls $E_1 \neq \mathbb{Q}$, $E_2 \neq \mathbb{Q}$ und $E_3 \neq \mathbb{Q}$, dann ist $\mathrm{Gal}(L/\mathbb{Q}) \cong D_4$.
Hinweis: Welche Permutationen in S_4 operieren jeweils trivial auf dem Erzeuger des Zwischenkörpers?

b) Zeige: In der Situation von a) sind E_1, E_2 und E_3 die einzigen Zwischenkörper E mit $[E : \mathbb{Q}] = 2$.

Aufgabe 4. (4P)

Sei K ein Körper und $L|K$ eine Körpererweiterung. Sei weiterhin $\tilde{L} = L \cap \bar{K}$ der Körper der über K algebraischen Elemente von L.

a) Sei $A \subset L$ eine Transzendenzbasis von L über K, also nach Blatt 4 $L|K(A)$ eine algebraische Erweiterung. Zeige, dass der Grad $[\tilde{L} : K]_{alg}$ den Grad $[L : K(A)]_{alg}$ teilt (wobei wir sagen, dass ∞ von jedem $\alpha \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ geteilt wird).

b) Gib ein Beispiel für K und L an, sodass für jede Transzendenzbasis $A \subset L$ $[\tilde{L} : K]_{alg}$ ein echter Teiler von $[L : K(A)]_{alg}$ ist, also $[\tilde{L} : K]_{alg} \neq [L : K(A)]_{alg}$ gilt.

Die Abgabe erfolgt immer in Gruppen bis zu vier Personen in den Abgabekästen im UG des Gebäudes 5. Die Namen und Matrikelnummern sämtlicher Gruppenmitglieder müssen auf dem Blatt stehen. Abgabe bis spätestens Mittwoch, den 07. 06. 2017 vor der Vorlesung.