Universität des Saarlandes
FR 6.1 Mathematik
Prof. Dr. G. Weitze-Schmithüsen
M.Sc. C. Steinhart

7. Übungsblatt zur Algebra

Aufgabe 1. (4P)

Sei wie auf dem letzten Übungsblatt $f(X) = X^4 + aX^3 + bX^2 + aX + 1$ ein reziprokes Polynom von Grad 4, α, $\frac{1}{\alpha}$, β, $\frac{1}{\beta}$ seine vier Nullstellen in $\overline{\mathbb{Q}}$, $L = Z(f) = \mathbb{Q}(\alpha, \beta)$ der Zerfällungskörper von f und E_1, E_2 und E_3 die drei Zwischenkörper:

$$E_1 = \mathbb{Q}(\alpha + \frac{1}{\alpha}), E_2 = \mathbb{Q}((\alpha+\beta)\cdot(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta})) \text{ und } E_3 = \mathbb{Q}(\alpha\beta^2 + \beta\alpha^{-2} + \alpha^{-1}\beta^{-2} + \beta^{-1}\alpha^2).$$

a) Sei $u = \alpha + \frac{1}{\alpha}$ und $v = \beta + \frac{1}{\beta}$. Zeige: $u^2 + v^2 = a^2 - 2(b-2)$ und $u^2v + v^2u = -a(b-2)$.
Hinweis: Zeige zuerst $u + v = -a$ und $u \cdot v = b - 2$?

b) Sei δ_1 die Quadratwurzel von $u^2 - 4$ und δ_2 die von $v^2 - 4$, so dass

$$\alpha = \frac{1}{2}(u+\delta_1), \frac{1}{\alpha} = \frac{1}{2}(u-\delta_1), \beta = \frac{1}{2}(v+\delta_2) \text{ und } \frac{1}{\beta} = \frac{1}{2}(v-\delta_2).$$

Zeige: $E_2 = \mathbb{Q}(\delta_1 \cdot \delta_2) = \mathbb{Q}(\sqrt{\Delta_2})$ mit $\Delta_2 = (b+2)^2 - 4a^2$.

c) Zeige:

$$8\alpha\beta^2 = uv^2 + 2(b-2)\delta_2 + u\delta_2^2 + v^2\delta_1 + 2v\sqrt{\Delta_2} + \delta_1\delta_2^2,$$

und schließlich: $E_3 = \mathbb{Q}(\sqrt{\Delta_1\Delta_2})$ mit $\Delta_1 = a^2 - 4(b-2)$.
Hinweis: Betrachte die Bahn von $\alpha\beta^2$ unter der Permutation σ der Nullstellen gegeben durch $\sigma : \alpha \mapsto \beta \mapsto \frac{1}{\alpha} \mapsto \frac{1}{\beta}$.

d) Finde ein irreduzibles, reziprokes Polynom f von Grad 4 mit $\mathrm{Gal}(Z(f)/\mathbb{Q})$ hat 8 Elemente und eines mit $\mathrm{Gal}(Z(f)/\mathbb{Q})$ hat 4 Elemente.

Aufgabe 2. (4P)

a) Zeige, dass jede endliche Gruppe die Galois-Gruppe einer Körpererweiterung ist.

b) Sei $K = \mathbb{F}_q$ wie immer ein endlicher Körper.
Zeige: Jede Galois-Gruppe einer galoisschen Körpererweiterung über K ist abelsch.
Bemerkung: Du darfst ohne Beweis benutzen, dass die Galois-Gruppe einer endlichen Körpererweiterung über $\mathbb{F}_q$ *zyklisch ist.*

Die Abgabe erfolgt immer in Gruppen bis zu vier Personen in den Abgabekästen im UG des Gebäudes 5. Die Namen und Matrikelnummern sämtlicher Gruppenmitglieder müssen auf dem Blatt stehen. Abgabe bis spätestens Mittwoch, den 14. 06. 2017 vor der Vorlesung.

Aufgabe 3. (4P)

Eine (endliche) *exakte Sequenz* ist eine (endliche) Folge von Objekten $G_0, G_1, \ldots, G_n$ (z.B. von Gruppen oder Vektorräumen) und einer dazugehörigen Folge von Morphismen $\varphi_i : G_{i-1} \to G_i$ (z.B. Gruppenhomomorphismen oder lineare Abbildungen), sodass $\mathrm{Bild}(\varphi_i) = \mathrm{Ker}(\varphi_{i+1})$ für alle $i \in \{1, \ldots, n-1\}$ gilt.

a) Sei
$$\{0\} = V_0 \xrightarrow{\varphi_1} V_1 \xrightarrow{\varphi_2} V_2 \xrightarrow{\varphi_3} \ldots \xrightarrow{\varphi_{n-1}} V_{n-1} \xrightarrow{\varphi_n} V_n = \{0\}$$
eine exakte Sequenz von endlich-dimensionalen Vektorräumen V_i.
Zeige, dass für die alternierende Summe der Dimensionen $\sum_{i=0}^n (-1)^i \dim(V_i) = 0$ gilt.

b) Eine endliche exakte Sequenz
$$1 \longrightarrow G_1 \longrightarrow G_2 \longrightarrow G_3 \longrightarrow 1$$
heißt *kurze exakte Sequenz* (wobei 1 das triviale Objekt/Nullobjekt, z.B. die Gruppe {e}, bezeichnet).
Seien nun $1 \to G_1 \xrightarrow{g_2} G_2 \xrightarrow{g_3} G_3 \to 1$ und $1 \to H_1 \xrightarrow{h_2} H_2 \xrightarrow{h_3} H_3 \to 1$ kurze exakte Sequenzen von Gruppen und $\phi_i : H_i \to G_i$ Morphismen, sodass das folgende Diagramm kommutiert:
$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[r] & G_1 \arrow[r, "g_2"] & G_2 \arrow[r, "g_3"] & G_3 \arrow[r] & 1 \\ 1 \arrow[r] & H_1 \arrow[r, "h_2"] \arrow[u, "\phi_1"] & H_2 \arrow[r, "h_3"] \arrow[u, "\phi_2"] & H_3 \arrow[r] \arrow[u, "\phi_3"] & 1 \end{tikzcd}$$
also $g_i \circ \phi_{i-1} = \phi_i \circ h_i$ gilt.
Zeige: Sind ϕ_1 und ϕ_3 injektiv, dann ist auch ϕ_2 injektiv.

Aufgabe 4. (4P)

Sei R ein kommutativer Ring (mit 1) und A eine R-Algebra (mit 1). Ein Element $\alpha \in A$ heißt *ganz über R*, wenn ein normiertes Polynom $f \in R[X]$ mit $f(\alpha) = 0$ existiert. Entsprechend heißt *A ganz über R*, wenn jedes Element von A ganz über R ist. Sei ab nun $R \subseteq A$ (mittels $R \cdot 1_A$).

a) Sei A ein Integritätsbereich und ganz über R.
Zeige, dass A genau dann ein Körper ist, wenn R ein Körper ist.

b) Was geht schief, wenn die Bedingung „A ist Integritätsbereich“ weggelassen bzw. „A ganz“ durch „A algebraisch“ ersetzt wird? Gib jeweils ein entsprechendes Beispiel an.

Die Abgabe erfolgt immer in Gruppen bis zu vier Personen in den Abgabekästen im UG des Gebäudes 5. Die Namen und Matrikelnummern sämtlicher Gruppenmitglieder müssen auf dem Blatt stehen. Abgabe bis spätestens Mittwoch, den 14. 06. 2017 vor der Vorlesung.