Universität des Saarlandes
FR 6.1 Mathematik
Prof. Dr. G. Weitze-Schmithüsen
M.Sc. C. Steinhart

8. Übungsblatt zur Algebra

Aufgabe 1. (4P)

Auf nächstem Blatt als Bonusaufgabe!

Aufgabe 2. (4P)

Sei R ein kommutativer Ring (mit 1) und A eine Ringerweiterung, d.h. ein Ring mit $R \subseteq A$, also insbesondere eine R-Algebra. Unter dem *ganzen Abschluss von R in A* versteht man die Menge[1] der über R ganzen Elemente von A.

a) Berechne den ganzen Abschluss von $\mathbb{Z}$ in $\mathbb{Q}(\frac{1+\sqrt{2}}{3})$.

b) Sei nun R ein Integritätsbereich und $K = \mathrm{Quot}(R)$ sein Quotientenkörper. Sei weiterhin $L|K$ eine algebraische Körpererweiterung (und damit natürlich auch eine R-Algebra).
Zeige, dass eine R-Unteralgebra $A \subseteq L$ existiert, die ganz über R ist und deren Quotientenkörper $\mathrm{Quot}(A) = L$ ist.

[1]: Das ist sogar eine Unteralgebra von A, das braucht ihr aber nicht zu zeigen.

Aufgabe 3. (4P)

Sei K ein Körper und wieder $\mu_n = \{\alpha \in \overline{K} \mid \alpha^n = 1\}$ die Gruppe der n-ten Einheitswurzeln.

a) Zeige: Ist K ein endlicher Körper, dann ist $K(\cup_{n\in\mathbb{N}}\mu_n) = \overline{K}$ der algebraische Abschluss von K.

b) Gib jeweils ein Beispiel für einen unendlichen Körper K an, für den a) gilt bzw. nicht gilt.

c) Seien für $n, m \in \mathbb{N}$ $\zeta_n, \zeta_m \in \overline{\mathbb{Q}}$ primitive n-te bzw. m-te Einheitswurzeln und $\zeta_n + \zeta_m = \zeta_k$ eine primitive k-te Einheitswurzel mit $2, 3 \nmid k$. Zeige, dass $n = m$ und $(\zeta_n\zeta_m)^k = 1$ gilt.

Aufgabe 4. (4P)

Sei K ein Körper und $M|K$ eine Körpererweiterung.

a) Sei $B \subseteq M$ algebraisch unabhängig und $\hat{\phi} : \{X_1, \dots, X_n\} \to B$ eine injektive Abbildung. Zeige, dass es einen eindeutigen K-linearen Körperhomomorphismus $\phi : K(X_1, \dots, X_n) \to M$ mit $\hat{\phi}(X_i) = \phi(X_i)$ für alle $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ gibt.

b) Seien $L = K(S)$ und $M = K(T)$ und $\phi : L \to M$, $S \mapsto T^n$ wie in a).
Wann ist $M|\phi(L)$ galloissch und was ist dann $\mathrm{Gal}(M|\phi(L))$?

Die Abgabe erfolgt immer in Gruppen bis zu vier Personen in den Abgabekästen im UG des Gebäudes 5. Die Namen und Matrikelnummern sämtlicher Gruppenmitglieder müssen auf dem Blatt stehen. Abgabe bis spätestens Mittwoch, den 21. 06. 2017 vor der Vorlesung.

Für $\hat{\mathbb{C}} := \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ ($= \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$) sei $\mathcal{M}(\hat{\mathbb{C}})$ die Menge der (meromorphen[2]) Funktionen von $\hat{\mathbb{C}}$ in sich selbst. Wir betrachten die Abbildung

$$\iota : \mathbb{Q}(X) \to \mathcal{M}(\hat{\mathbb{C}}) \quad , \quad f \mapsto \iota(f),$$

wobei wir für $f(X) = \frac{g(X)}{h(X)} \in \mathbb{Q}(X)$ mit $g, h \in \mathbb{Q}[X]$

$$\iota(f)(\alpha) = \begin{cases} \frac{g(\alpha)}{h(\alpha)} & \text{, für } \alpha \in \mathbb{C} \text{ und } h(\alpha) \neq 0 \\ \lim\limits_{n\to\infty} f(\alpha_n) & \text{, sonst, wobei } \alpha_n \in \mathbb{C} \text{ und } h(\alpha_n) \neq 0 \text{ mit } \lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = \alpha \end{cases}$$

setzen. (Für $a_n \to \infty$ schreiben wir $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$.)

c) Bestimme für $f(X) = \frac{2X^2+X+1}{X^2+1}$ die Werte $\iota(f)(\infty)$ und $\iota(f)(i)$.

d) Zeige, dass $\iota(f)$ genau dann surjektiv ist, wenn f nicht konstant, d.h. $f \notin \mathbb{Q}$, ist.

[2]: Falls du nicht weißt, was das ist, kannst du das ignorieren.