Universität des Saarlandes
FR 6.1 Mathematik
Prof. Dr. G. Weitze-Schmithüsen
M.Sc. C. Steinhart

9. Übungsblatt zur Algebra

Aufgabe 1. (4P)

Sei $\hat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ und $\iota : \mathbb{C}(X) \to \mathcal{M}(\hat{C})$ wie auf letztem Blatt. Wir betrachten für $n \in \mathbb{N}$ die Abbildung $\pi : \hat{\mathbb{C}} \to \hat{\mathbb{C}}$, $z \mapsto z^n$ (mit $\infty^n = \infty$).

a) Sei $\mathrm{Deck}(\pi) := \{\tau \in \mathbb{C}(\hat{\mathbb{C}}) \mid \pi \circ \tau = \pi\}$ die Gruppe der stetigen Abbildungen von $\hat{\mathbb{C}}$ auf sich selbst, die fasertreu sind, also Urbilder von π invariant lassen.
Zeige, dass $\mathrm{Deck}(\pi) = \{\mathrm{z} \mapsto \zeta_\mathrm{n}\mathrm{z} \mid \zeta_\mathrm{n} \in \mathbb{C}^\times \text{ eine } \mathrm{n-te} \text{ Einheitswurzel}\}$ gilt.
Hinweis: Betrachte für zwei Elemente $z, z' \in \mathbb{C}^\times$ einen Pfad, der nicht durch 0 geht und zeige damit, dass τ eine konstante Multiplikation ist.

b) Jede Funktion $f \in \mathcal{M}(\hat{\mathbb{C}})$ induziert eine Abbildung $f^\star : \mathcal{M}(\hat{\mathbb{C}}) \to \mathcal{M}(\hat{\mathbb{C}})$, $g \mapsto g \circ f$. Gib einen $\mathbb{C}$-linearen Körperhomomorphismus $\phi : \mathbb{C}(X) \to \mathbb{C}(X)$ an, sodass $\iota \circ \phi = \pi^\star \circ \iota$ gilt. Wie verhält sich die Gruppe $\mathrm{Deck}(\pi)$ zur Galois-Gruppe $\mathrm{Gal}(\mathbb{C}(X)|\phi(\mathbb{C}(X)))$?

c) Sei nun ein $\mathbb{C}$-linearer Körperhomomorphismus $\phi : \mathbb{C}(X) \to \mathbb{C}(X)$ gegeben.
Zeige, dass es eine Funktion $f \in \mathcal{M}(\hat{\mathbb{C}})$ mit $\iota \circ \phi = f^\star \circ \iota$ gibt.

Aufgabe 2. (4P)

Sei K ein beliebiger Körper und $\chi_G = \{\chi : G \to K^\times | \ \chi \text{ Gruppenhomomorphismus}\}$ die Gruppe der K-wertigen Charaktere.

a) Richtig oder falsch? Die Charaktergruppe χ_G einer endlichen zyklischen Gruppe ist zyklisch.

b) Bestimme die Charaktergruppe χ_G für $G = S_3$.

c) Sein nun $K = \mathbb{C}$ und G eine endliche, abelsche Gruppe. Zeige, dass die Charaktergruppe χ_G eine $\mathbb{C}$-Vektorraum-Basis von $V = \mathrm{Abb}(G, \mathbb{C})$ ist.

Aufgabe 3. (4P)

Seien $G = \{g_1, \ldots, g_n\}$ eine endliche Gruppe und S ein Erzeugendensystem, das symmetrisch ist, das heißt es gilt $s \in S \Rightarrow s^{-1} \in S$. Wir definieren dazu den Graph $\Gamma = C(G, S)$ wie folgt: die Ecken des Graphen entsprechen bijektiv den Elementen aus G. Zwei Ecken v_1 und v_2 sind genau dann durch eine Kante verbunden, wenn für die beiden zugehörigen Gruppenelemente g_1 und g_2 gilt:

$$g_2 = g_1 \cdot s \text{ für ein } s \in S.$$

$\Gamma = C(G, S)$ heißt auch *Cayleygraph* von G bezüglich S.

a) Zeichne jeweils Cayleygraphen zu $G = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ und $G = S_3$ für ein Erzeugendensystem Deiner Wahl.

Die Abgabe erfolgt immer in Gruppen bis zu vier Personen in den Abgabekästen im UG des Gebäudes 5. Die Namen und Matrikelnummern sämtlicher Gruppenmitglieder müssen auf dem Blatt stehen. Abgabe bis spätestens Mittwoch, den 28. 06. 2017 vor der Vorlesung.

b) Die Ecken des Cayleygraphen bezeichnen wir im Folgenden mit $v_1, \dots, v_n$.
Es sei $A = (a_{i,j})$ die *Adjazenzmatrix* von Γ, das heißt

$$a_{i,j} = \begin{cases} 1, & \text{falls zwischen der Ecke } v_i \text{ und } v_j \text{ eine Kante ist} \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Bestimme jeweils die Adjazenzmatrizen für Deine Beispiele in i).

c) Sei χ_G die Gruppe der K-wertigen Charaktere und $\chi \in \chi_G$.
Zeige: Der Vektor $(\chi(g_i)_{i\in G})$ ist Eigenvektor von A zum Eigenwert $\sum_{s\in S} \chi(s)$.

Aufgabe 4. (4P)

Sei G eine Gruppe[1] und R ein kommutativer Ring mit 1. Wir definieren

$$\begin{aligned} A = R[G] :&= \{f : G \to R \mid f(g) = 0 \text{ für fast alle } g \in G\} \\ &= \{\sum_{g\in G} \alpha_g g \mid \alpha_g = 0 \text{ für fast alle } g \in G\} \end{aligned}$$

Wobei A mit den Verknüpfungen

$$\begin{aligned} (\sum_{g\in G} \alpha_g g) + (\sum_{g\in G} \beta_g g) &= \sum_{g\in G} (\alpha_g + \beta_g) g \\ (\sum_{g\in G} \alpha_g g) \cdot (\sum_{g\in G} \beta_g g) &= \sum_{g\in G} (\sum_{h\in G} \alpha_{gh}\beta_{h^{-1}}) g = \sum_{g,h\in G} (\alpha_g \beta_h)(gh) \\ \lambda \cdot \sum_{g\in G} \alpha_g g &= \sum_{g\in G} (\lambda \alpha_g) g \qquad (\lambda \in R) \end{aligned}$$

zu einer R-Algebra wird.

a) Sei nun G abelsch, also $R[G]$ eine kommutative R-Algebra. Zeige folgende Äquivalenz:
$M = \{g_1, \dots, g_n\} \subseteq G \subset A$ ist algebraisch unabhängig über R $\Longleftrightarrow$
Jedes $g_i \in M$ hat unendliche Ordnung, $M \setminus \{g_n\}$ ist algebraisch unabhängig und es gilt $< g_1, \dots, g_{n-1} >_{Gruppe} \cap < g_n >_{Gruppe} = \{e_G\}$.

Sei nun $K = R$ ein Körper, dann haben wir die *linksreguläre Darstellung* $l : G \to \mathrm{GL}(K[G]), h \mapsto l_h$ mit $l_h(\sum_{g\in G} \alpha_g g) := \sum_{g\in G} \alpha_g hg$.

b) Sei $v \in K[G] \setminus \{0\}$ ein Fixpunkt, d.h. für alle $g \in G$ ist $l_g(v) = v$.
Zeige, dass dann G endlich ist und $v = \sum_{g\in G} \lambda g$ für ein $\lambda \in K^\times$ gilt. Insbesondere ist dann $< v >$ der größte Untervektorraum, auf dem G trivial operiert.

[1]: Das geht genauso gut auch für Monoide, also „Gruppen ohne Inversenaxiom“.

Aufgabe 5. (4 Bonuspunkte)

Es sei $\mu_n = \{\alpha \in \overline{\mathbb{Q}} \mid \alpha^n = 1\}$ die Gruppe der n-ten Einheitswurzeln in $\overline{\mathbb{Q}}$ und

$$E := \bigcup_{k\geq 0} \mu_{2^k}$$

die Gruppe der 2er-Potenzen-Einheitswurzeln. Weiterhin sei $L := \mathbb{Q}(E)$.
Wir betrachten den Automorphismus $\sigma \in \mathrm{Gal}(L|\mathbb{Q})$ mit $\sigma(\zeta) = \zeta^3$ für alle $\zeta \in E$ und die von σ erzeugte Untergruppe $H =< \sigma > \subseteq Gal(L|\mathbb{Q})$.
Zeige, dass $\mathrm{Gal}(L/L^H) \neq H$ ist.

Die Abgabe erfolgt immer in Gruppen bis zu vier Personen in den Abgabekästen im UG des Gebäudes 5. Die Namen und Matrikelnummern sämtlicher Gruppenmitglieder müssen auf dem Blatt stehen. Abgabe bis spätestens Mittwoch, den 28. 06. 2017 vor der Vorlesung.