„⇒": Sei L eine Gerade, d.h. $\exists\, v=(x_0,y_0),\ w=(m_1,m_2)\neq \underline{0}$ in $\mathbb{R}^2$ mit $L=v+\mathbb{R}w$ 9.11.17

Ansatz: (vgl. Beh. in „⇐") $b:=m_1$, $a:=-m_2$

wegen $(x_0,y_0)\in L$: $c:=a\cdot x_0+b\cdot y_0=-m_2 x+m_1\cdot y_0$

Zeige nun: $L=L'$ mit $L'=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid ax+by=c\}$

„⊆": Sei $(x,y)\in L$, d.h. $\exists\, t\in\mathbb{R}: (x,y)=(x_0,y_0)+t\cdot(m_1,m_2)$

$\Rightarrow ax+by=-m_2(x_0+tm_1)+m_1(y_0+t\cdot m_2)=-m_2\cdot x_0+m_1\cdot y_0=c$

$\Rightarrow (x,y)\in L'$

„⊇": Sei $(x,y)\in L' \Rightarrow ax+by=c$

$\Rightarrow -m_2x+m_1y=-m_2x_0+m_1y_0$

$\Rightarrow m_1(y-y_0)=m_2(x-x_0)$

$\Rightarrow \frac{m_2}{m_1}=\frac{y-y_0}{x-x_0}$, falls $m_1\neq 0$ und $\frac{m_1}{m_2}=\frac{x-x_0}{y-y_0}$, falls $m_2\neq 0$

m_1 oder m_2 muss $\neq 0$ sein, weil der Vektor nicht der Nullvektor war

Gesucht ist nun $r\in\mathbb{R}$ mit $(x,y)=(x_0,y_0)+r(m_1,m_2)$

Falls $m_1\neq 0 \Rightarrow$ wähle $r=\frac{x-x_0}{m_1}$

Dann gilt $(x_0,y_0)+r(m_1,m_2)=(x,\ y_0+\frac{x-x_0}{m_1}\cdot m_2)=(x,y)$ ✓

Analoge Rechnung für $m_1=0$ und somit $m_2\neq 0$

Proposition 2.6

Zwei Gleichungen $ax+by=c$ und $a'x+b'y=c'$ beschreiben die gleiche Gerade $\Leftrightarrow \exists\, r\in\mathbb{R}\setminus\{0\}: (a',b',c')=r(a,b,c)$

Beweis: Übungsblatt

Zusammenfassung

3 verschiedene Beschreibungen für Geraden in $\mathbb{R}^2$:

(A) Parameterdarstellung: $g=g_{v,w}=v+\mathbb{R}w$

mit $v,w\in\mathbb{R}^2$, $w\neq 0$

(B) 2-Punkte Darstellung: $g=g_{v_1,v_2}=\{tv_1+(1-t)\cdot v_2 \mid t\in\mathbb{R}\}$

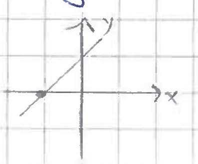
v_1, v_2 Punkte auf der Geraden

(C) Geradengleichung $g=g_{(a,b,c)}=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid ax+by=c\}$, $a,b,c\in\mathbb{R}$

Steigung: $m=\frac{a}{b}\in\mathbb{R}\cup\{\infty\}$

$b\neq 0 \Rightarrow (0,\frac{c}{b})\in g$

$a\neq 0 \Rightarrow (\frac{c}{a},0)\in g$



Bemerkung 2.7

3 Punkte $v_1, v_2, v_3 \in \mathbb{R}^2$ liegen auf einer Geraden $\Leftrightarrow$

$\exists r_1, r_2, r_3 \in \mathbb{R}$ mit $(r_1, r_2, r_3) \neq (0,0,0)$ und $r_1 + r_2 + r_3 = 0$, sodass

$$r_1 v_1 + r_2 v_2 + r_3 v_3 = \underline{0}$$

Beweis

Fall 1: Mindestens zwei der drei Punkte sind gleich

OE: $v_1 = v_2$. Dann gilt:

① $\Rightarrow v_1, v_2, v_3$ liegen auf einer Geraden

② $v_1 - v_2 + 0 \cdot v_3 = \underline{0}$ und $1 - 1 + 0 = 0$

Das heißt die Äquivalenz gilt, weil beide Seiten erfüllt sind

Fall 2: v_1, v_2, v_3 verschieden

„$\Rightarrow$" v_1, v_2, v_3 liegen auf einer Geraden

$\overset{\text{B}}{\Rightarrow} \exists t \in \mathbb{R}: v_3 = t v_1 + (1-t) v_2$

$\Rightarrow t \cdot v_1 + (1-t) v_2 - v_3 = \underline{0}$ und $t + 1 - t - 1 = 0$

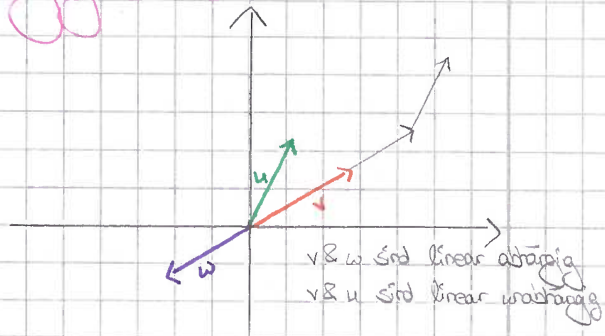
„$\Leftarrow$" $r_1 v_1 + r_2 v_2 + r_3 v_3 = 0$

$(r_1, r_2, r_3) \neq (0,0,0) \Rightarrow$ OE $r_3 \neq 0$

$\Rightarrow v_3 = -\frac{r_1}{r_3} v_1 + \frac{-r_2}{r_3} v_2$ und $\frac{-r_1}{r_3} + \frac{-r_2}{r_3} = \frac{-r_1 - r_2}{r_3} = \frac{r_3}{r_3} = 1$ ✓ ☒

$r_1 + r_2 + r_3 = 0$
$\Leftrightarrow -r_1 - r_2 = r_3$

3. Lineare Unabhängigkeit im $\mathbb{R}^2$



Definition 3.1

Seien $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^2$

(i) v_1 und v_2 heißen **linear abhängig**

$:\Leftrightarrow \exists\, r_1, r_2 \in \mathbb{R}$ mit $(r_1, r_2) \neq (0,0)$: $r_1 v_1 + r_2 v_2 = \underline{0}$

(ii) v_1 und v_2 heißen **linear unabhängig**

$:\Leftrightarrow$ v_1, v_2 sind nicht linear abhängig

$\Leftrightarrow$ Falls $r_1 v_1 + r_2 v_2 = \underline{0}$ mit $r_1, r_2 \in \mathbb{R}$ dann ist $r_1 = r_2 = 0$

Bemerkung 3.2

v_1, v_2 sind linear abhängig

$\Leftrightarrow$ einer von beiden ist Vielfaches von anderem, d.h. es gilt $v_1 = r v_2$ oder $v_2 = r v_1$ für ein $r \in \mathbb{R}$

Beweis: Übung

Vorüberlegung:

Für $v_1 = \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$, $r_1, r_2 \in \mathbb{R}$

$$r_1 v_1 + r_2 v_2 = \underline{0} \Leftrightarrow r_1 \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} + r_2 \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{matrix} r_1 a + r_2 b = 0 \\ r_1 c + r_2 d = 0 \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{matrix} a r_1 + b r_2 = 0 \\ c r_1 + d r_2 = 0 \end{matrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\rightsquigarrow$ Erhalte für $\begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \end{pmatrix}$ ein lineares Gleichungssystem (LGS)

v_1, v_2 sind linear unabhängig $\Leftrightarrow$ LGS hat nur die Lösung $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Kurzeinführung 3.3

Was ist eine 2×2-Matrix $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 2{,}3 & 5 \\ -1{,}7 & 6 \end{pmatrix}$

$\mathbb{R}^{2\times 2} = \{ A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid A$ ist eine 2×2-Matrix mit reellen Einträgen$\}$

i) Für $A_1 = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix}$, $A_2 = \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ definiere

$$A_1 + A_2 := \begin{pmatrix} a_1 + a_2 & b_1 + b_2 \\ c_1 + c_2 & d_1 + d_2 \end{pmatrix}, \quad A_1 \cdot A_2 := \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 a_2 + b_1 c_2 & a_1 b_2 + b_1 d_2 \\ c_1 a_2 + d_1 c_2 & c_1 b_2 + d_1 d_2 \end{pmatrix}$$

ii) $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$, $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$, dann definiere

$$Av := \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} a v_1 + b v_2 \\ c v_1 + d v_2 \end{pmatrix}$$

Es gilt: $A\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}\cdot v=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}v=v$

(iii) Für $A=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^{2\times2}$ definieren wir: $\det(A)=ad-bc\in\mathbb{R}$

~~det heißt Determinante~~

$\det(A)$ heißt Determinante von A

Falls $\det(A)\neq0$, dann definiere die Matrix

$$B=\frac{1}{\det(A)}\begin{pmatrix}d&-b\\-c&a\end{pmatrix}$$

Beachte für die Matrix $I=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$ gilt $I\cdot A=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}=A$

I heißt Einheitsmatrix $\qquad A\cdot I=A$

Nun gilt: $A\cdot B=B\cdot A=I$ (Übung)

Außerdem: $\det(A)=0 \Rightarrow$ Es gibt keine Matrix B mit $A\cdot B=I$ (Übung)

Proposition 3.4

Das LGS $\begin{cases}ax+by=0\\cx+dy=0\end{cases}$ mit $a,b,c,d\in\mathbb{R}$ hat eine Lösung $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\neq\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$

$\Leftrightarrow \det(A)=0$, wobei $A=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$

Beweis:

Vorüberlegung: $\begin{matrix}ax+by=0\\cx+dy=0\end{matrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} \Leftrightarrow A\cdot\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=0 \quad \begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}ax+by\\cx+dy\end{pmatrix}$

„$\Rightarrow$" Angenommen $\det(A)\neq0 \Rightarrow \exists$ inverse Matrix B mit $AB=BA=I$

Dann gilt $v=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^2$: $Av=\underline{0} \Rightarrow \underbrace{B\cdot A}_{I}\cdot v=B\cdot\underline{0}=\underline{0} \Rightarrow v=\underline{0}$

$\Rightarrow$ Es gibt keine Lösung außer $\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$

„$\Leftarrow$" $\det(A)=0 \Rightarrow ad-bc=0 \Rightarrow ad=bc$

Falls $a\neq0$ gilt: $v=\begin{pmatrix}-b\\a\end{pmatrix}$ ist eine Lösung

$\Rightarrow$ I: $ax+by=-ab+ba=0$

II: $cx+dy=-cb+da=0$

Falls $c\neq0$ gilt: $v=\begin{pmatrix}-d\\c\end{pmatrix}$ ist eine Lösung

Falls $a=0$ und $c=0$ gilt $v=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ ist eine Lösung