16.11.17

Proposition 3.5

Sind $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^2$ linear unabhängig, dann erzeugen sie den $\mathbb{R}^2$, das heißt:

$\forall v \in \mathbb{R}^2 \; \exists r_1, r_2 \in \mathbb{R}$ mit $r_1 v_1 + r_2 v_2 = v$ (*)

Diese Darstellung ist eindeutig

Beweis:

Existenz:

$r_1 v_1 + r_2 v_2 = v$, wobei $v_1 = \binom{a}{c}$, $v_2 = \binom{b}{d}$ linear unabhängig, $v = \binom{e}{f}$

$\Leftrightarrow r_1 \binom{a}{c} + r_2 \binom{b}{d} = \binom{e}{f}$

$$\Leftrightarrow \begin{aligned} r_1 a + r_2 b &= e \\ r_1 c + r_2 d &= f \end{aligned} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix}$$

v_1, v_2 linear unabhängig $\Rightarrow \det(A) \neq 0 \Rightarrow A^{-1}$ existiert

und dann gilt: $\begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \end{pmatrix} = A^{-1} \cdot v$ ist eine Lösung von (*)

Eindeutigkeit:

Falls $r_1', r_2' \in \mathbb{R}$ mit $r_1' v_1 + r_2' v_2 = v$

Dann folgt $(r_1 - r_1') v_1 + (r_2 - r_2') v_2 = \underline{0}$

$\Rightarrow r_1 = r_1'$ und $r_2 = r_2'$, da v_1 und v_2 linear unabhängig

$\Rightarrow$ Behauptung

$\det(A) \neq 0$
$\rightarrow A$ invertierbar

Eindeutigkeit zeigt man typischerweise als Widerspruch analytische Geometrie

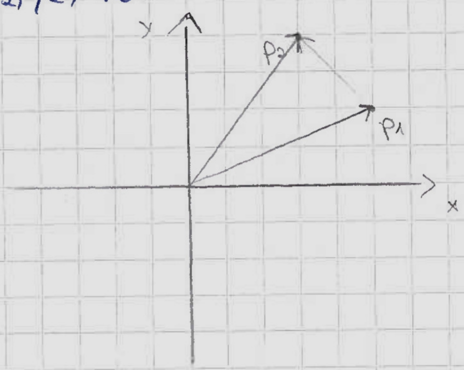
4. Geometrie im $\mathbb{R}^2$

16.11.17

Vorüberlegung

Für zwei Punkte $p_1 = (x_1, y_1)$, $p_2 = (x_2, y_2)$ notieren wir

$$\overrightarrow{p_1 p_2} := (x_2 - x_1, y_2 - y_1) = p_2 - p_1$$



Dann gilt für $p_1, p_2, p_3 \in \mathbb{R}^2$:

$$\overrightarrow{p_1 p_3} = \overrightarrow{p_1 p_2} + \overrightarrow{p_2 p_3}$$

Denn:

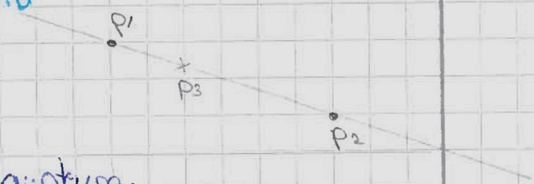
$$\overrightarrow{p_1 p_3} = p_3 - p_1 = p_3 - p_1 + p_2 - p_2$$
$$= p_2 - p_1 + p_3 - p_2 = \overrightarrow{p_1 p_2} + \overrightarrow{p_2 p_3}$$

Bemerkung 4.1

Seien $p_1, p_2 \in \mathbb{R}^2$ mit $p_1 \neq p_2$ und $p_3 \in \mathbb{R}^2$, dann gilt

p_3 liegt auf der eindeutigen Geraden durch p_1 und p_2

$\Leftrightarrow$ $\overrightarrow{p_1 p_3}$ und $\overrightarrow{p_3 p_2}$ linear abhängig sind



Beweis:

„$\Rightarrow$" Für $p_3 = p_1$ bzw. $p_3 = p_2$ gilt die Behauptung.

Betrachte daher nur $p_2 \neq p_3 \neq p_1$.

$$p_3 = t p_1 + (1-t) p_2$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{p_1 p_3} = p_3 - p_1 = \underbrace{(t-1)}_{-(1-t)} p_1 + (1-t) p_2 = (1-t) \cdot (-p_1 + p_2)$$

$$\overrightarrow{p_3 p_2} = p_2 - p_3 = -t \cdot p_1 + t \cdot p_2 = t \cdot (-p_1 + p_2)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{1-t} \overrightarrow{p_1 p_3} - \frac{1}{t} \overrightarrow{p_3 p_2} = \underline{0} \Rightarrow \overrightarrow{p_1 p_3} \text{ und } \overrightarrow{p_3 p_2} \text{ sind l.a.}$$

Beachte

Falls $p_3 \neq p_1$, dann gilt $t \neq 1$ und $\overrightarrow{p_1 p_3} = \frac{1-t}{t} \overrightarrow{p_3 p_2}$

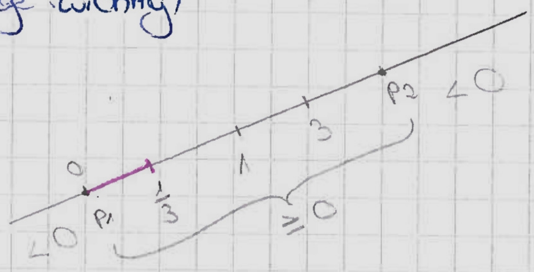
„$\Leftarrow$" Übung

Definition 4.2

Seien $p_1, p_2, p_3 \in \mathbb{R}^2$ drei Punkte auf einer Geraden mit $p_1 \neq p_2$ und $p_2 \neq p_3$. Nach Bemerkung 4.1 gilt:

$\exists r \in \mathbb{R}$ mit $\overrightarrow{p_1p_3} = r \cdot \overrightarrow{p_3p_2}$

Wir nennen $TV(p_1, p_2; p_3) =: r$ das Teilverhältnis von p_3 bzgl. p_1 und p_2. (⚠ Reihenfolge wichtig)



Bemerkung 4.3

(i) $p_3 = tp_1 + (1-t)p_2$

$\Rightarrow TV(p_1, p_2; p_3) = \frac{1-t}{t}$

(ii) $p_3 = \frac{1}{2}(p_1 + p_2) \Rightarrow TV(p_1, p_2; p_3) = 1$

(iii) $p_3 = p_1 \Rightarrow TV(p_1, p_2; p_3) = 0$

(iv) $TV(p_1, p_2; p_3) \geq 0 \Leftrightarrow p_3$ liegt auf Strecke zw. p_1 und p_2

Beweis:

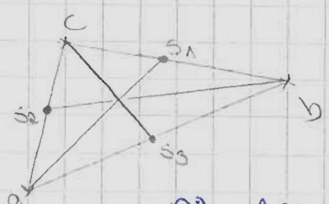
(i) folgt aus Rechnungen in 4.1

(ii) + (iii) folgt aus (i) mit $t = \frac{1}{2}$ bzw. $t = 0$

(iv) folgt aus (i) mit p_3 liegt auf Strecke zw. p_1 und p_2

$\Leftrightarrow p_3 = tp_1 + (1-t)p_2$ mit $0 \leq t \leq 1$

Satz 2 (Satz von Ceva)



Seien $a, b, c \in \mathbb{R}^2$ drei Punkte, die ein Dreieck erzeugen (d.h. sie liegen nicht auf einer Geraden). Seien $s_1, s_2, s_3 \in \mathbb{R}^2$ ungleich a, b, c mit $s_1 \in [b,c], s_2 \in [a,c], s_3 \in [a,b]$. Seien g_1, g_2, g_3 die 3 Geraden durch a und s_1, b und s_2 bzw. c und s_3.

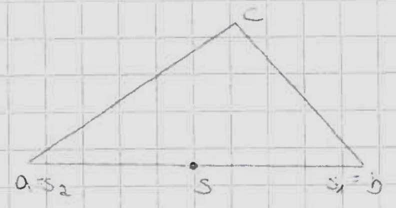
Schneiden sich g_1, g_2, g_3 in einem Punkt s, dann gilt:

$TV(a, b; s_3) \cdot TV(b, c; s_1) \cdot TV(c, a; s_2) = 1$

Beweis

OE: $s = \underline{0}$: Verschiebe dazu die gesamte Figur. Dabei verändern sich die TV's nicht. (Übung) ?

Beachte: a und b sind linear unabhängig, denn sonst liegt s auf $[a,b]$ und $a = s_2, b = s_1$ ↯ s.o.



$\Rightarrow \exists r_1, r_2 \in \mathbb{R}$ mit $c = r_1 a + r_2 \cdot b$ ⤳ erzeugt komplett $\mathbb{R}^2$

Betrachte nun $\overrightarrow{ss_1}, \overrightarrow{ss_2}, \overrightarrow{ss_3}$ und verwende, dass diese auf den Geraden durch die Eckpunkte liegen.

Schreibe $s_3 = t_1 a + (1-t_1) \cdot b$ $\quad \left(TV \ \frac{1-t_1}{t_1}\right)$

$s_1 = t_2 b + (1-t_2) \cdot c$ $\quad \left(TV \ \frac{1-t_2}{t_2}\right)$

$s_2 = t_3 c + (1-t_3) \cdot a$ $\quad \left(TV \ \frac{1-t_3}{t_3}\right)$

$\Rightarrow s_1 = t_2 \cdot b + (1-t_2) \cdot (r_1 \cdot a + r_2 \cdot b)$

$= (1-t_2) \cdot r_1 \cdot a + (t_2 + (1-t_2) \cdot r_2) \cdot b$

$\overset{\text{Prop 3.5}}{\Longrightarrow} t_2 + (1-t_2) \cdot r_2 = 0$ ⤷ wenn das $\neq 0$ wäre, hätten wir keine Gerade mehr

$\Rightarrow \frac{1-t_2}{t_2} = -\frac{1}{r_2}$

$\overset{\text{Bem. 4.3}}{\Longrightarrow} TV(b, c; s_1) = -\frac{1}{r_2}$

$s_2 = t_3 (r_1 \cdot a + r_2 \cdot b) + (1-t_3) a$

$= \underbrace{(t_3 \cdot r_1 + (1-t_3))}_{=0} \cdot a + t_3 r_2 b$

$\Rightarrow t_3 \cdot r_1 + (1-t_3) = 0 \quad \Rightarrow \frac{1-t_3}{t_3} = -r_1$

$\overset{\text{Bem 4.3}}{\Longrightarrow} TV(c, a; s_2) = -r_1$

$s_3 = t_1 \cdot a + (1-t_1) \cdot b$

außerdem ist $s_3 = x \cdot c = x \cdot (r_1 a + r_2 \cdot b)$ $\quad (x \in \mathbb{R})$

$= x r_1 a + x r_2 b$

$\Rightarrow x r_1 = t_1, \ x r_2 = 1 - t_1 \quad \Rightarrow \frac{1-t_1}{t_1} = \frac{r_2}{r_1} = TV(a, b; s_3)$

Aufmultiplizieren der TV's ergibt die Behauptung □

Auch die Rückrichtung lässt sich beweisen
Seien $a,b,c \in \mathbb{R}^2$, die ein Dreieck aufspannen und seien $s_1,s_2,s_3 \in \mathbb{R}^2$ ungleich a,b,c mit $s_1 \in [b,c]$, $s_2 \in [a,c]$, $s_3 \in [a,b]$ genau so, dass $\overline{TV}(a,b;s_3) \cdot \overline{TV}(b,c;s_1) \cdot \overline{TV}(a,c;s_2) = 1$

Dann schneiden sich die Geraden g_1, g_2, g_3 durch a und s_1 bzw. b und s_2 bzw. c und s_3 in einem Punkt s

Beweis: Übung → Widerspruchsbeweis