02.11.17

Proposition 1.15

Sei V ein reeller VR mit Addition $+$ und Skalarmultiplikation $\cdot$.

i) $\forall r \in \mathbb{R}$ gilt: $r \cdot \underline{0} = \underline{0}$

ii) Falls gilt für $r \in \mathbb{R}, v \in V$: $r \cdot v = \underline{0}$, dann ist $r = 0$ oder $v = \underline{0}$

iii) $\forall v \in V$ gilt: $0 \cdot v = \underline{0}$

Beweis:

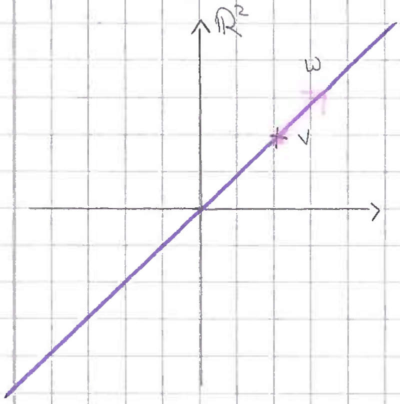
i) $r \cdot \underline{0} \overset{1c)}{=} r \cdot (\underline{0} + \underline{0}) \overset{2b}{=} r \cdot \underline{0} + r \cdot \underline{0} \quad (*)$

Sei $-(r \cdot \underline{0})$ das additive Inverse zu $r \cdot \underline{0}$

$$\Rightarrow \underline{0} \overset{1d)}{=} r \cdot \underline{0} + (-r \cdot \underline{0})$$
$$\overset{(*)}{=} (r \cdot \underline{0} + r \cdot \underline{0}) + (-r \cdot \underline{0})$$
$$\overset{1a)}{=} r \cdot \underline{0} + \underbrace{(r \cdot \underline{0} + -(r \cdot \underline{0}))}_{}$$
$$\overset{1d)}{=} r \cdot \underline{0} + \underline{0}$$
$$\overset{1c)}{=} r \cdot \underline{0}$$

ii) & iii) Übungsblatt

2 Geraden



$L = \{v + rw \mid r \in \mathbb{R}\}$

$w \neq \underline{0}$

v ist der Punkt
w der Richtungsvektor

Es sei in diesem Abschnitt V stets ein $\mathbb{R}$-VR

Definition 2.1

Eine Teilmenge $L \subseteq V$ heißt **(affine) Geraden**

$:\Leftrightarrow \exists v, w \in V$ mit $w \neq \underline{0}$, so dass $L = v + \mathbb{R} \cdot w := \{v + r \cdot w \mid r \in \mathbb{R}\}$

Die Darstellung $v + \mathbb{R}w$ von L heißt **Parameterdarstellung** der Geraden, v heißt **Aufpunkt**, w **Richtungsvektor**, r heißt **Parameter**

Frage: Wie eindeutig ist die Parameterdarstellung

Proposition 2.2

i) Es sei $L = v + \mathbb{R}w$ eine Gerade in V und $v' \in L$ beliebig

Dann gilt: $L = v' + \mathbb{R}w$

ii) Es seien $L = v + \mathbb{R}w$ und $L' = v' + \mathbb{R}w'$ mit $v, v', w, w' \in V$, $w \neq \underline{0} \neq w'$ zwei Geraden.

Dann gilt: $L = L' \Leftrightarrow L \cap L' \neq \emptyset$ und $\exists r_0 \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ mit $w' = r_0 w$

Beweis

i) $v' \in L \Rightarrow \exists r' \in \mathbb{R}$ mit $v' = v + r' \cdot w$ (*)

Setze $L' := v' + \mathbb{R}w$ und zeige $L = L'$:

(1) $\underline{L \subseteq L'}$: Ist $u \in L$, dann lässt es sich schreiben als $u = v + r w$ mit einem $r \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow u = v' - v' + v + r \cdot w \overset{(*)}{=} v' - (v + r' w) + v + r \cdot w$

$= v' + (r - r') \cdot w \in v' + \mathbb{R}w = L'$

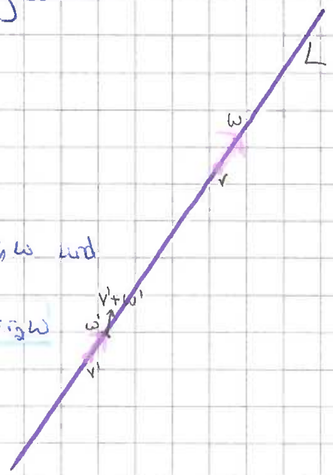
② $L' \subseteq L$ Sei $u \in L' \Rightarrow \exists r \in \mathbb{R}$ mit $u = v' + r \cdot w = v + (r + r') \cdot w \in L$

Aus ① und ② folgt $L = L'$

ii) Zeige die beiden Richtungen wie folgt:

„$\Rightarrow$": $L = L' \Rightarrow L \cap L' \neq \emptyset$

Finde noch ein $r_0 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ wie gewünscht



Verwende: ① $w' = v' + w' - v'$

② v' und $v' + w' \in L' = L$

$\Rightarrow \exists r_1, r_2 \in \mathbb{R}$ mit $v' = v + r_1 w$ und

$v' + w' = v + r_2 w$

Setze ② in ① ein:

$$w' = (v + r_2 w) - (v + r_1 w) = \underbrace{(r_2 - r_1)}_{=: r_0} w$$

Beachte: Prop. 1.15 $\Rightarrow r_0 \neq 0$ da sonst $w' = 0$ wäre & das soll laut Def 2.1 nicht sein

$\Rightarrow r_0 = r_2 - r_1$ leistet das Gewünschte

„$\Leftarrow$" Sei $v_0 \in L \cap L'$. Beachte $w' = r_0 \cdot w \overset{r_0 \neq 0}{\Leftrightarrow} \frac{1}{r_0} \cdot w' = w$

i) $L = v_0 + \mathbb{R} w$ und $L' = v_0 + \mathbb{R} w'$

wir dürfen bel. Aufpunkte wählen

Zeige nun: $L = L'$

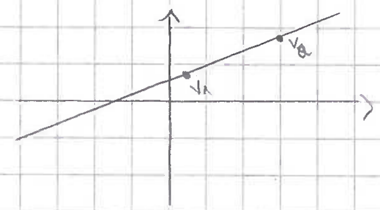
„$\subseteq$" $u \in L \Rightarrow \exists r \in \mathbb{R}: u = v_0 + r w = v_0 + \frac{r}{r_0} w' \in L'$

„$\supseteq$" $u \in L' \Rightarrow \exists r \in \mathbb{R}: u = v_0 + r w' = v_0 + r r_0 w \in L$

$\Rightarrow L = L'$ □

Korollar 2.3

Durch zwei verschiedene Punkte $v_1, v_2 \in V$ gibt es genau eine Gerade



Beweis:

① **Existenz:** Wähle $L := v_1 + \mathbb{R}\omega$ mit $\omega = v_2 - v_1$

$\Rightarrow v_1 = v_1 + 0 \cdot \omega \in L$ und $v_2 = v_1 + 1 \cdot \omega \in L$

$= v_1 + 1 \cdot v_2 - v_1$

$= v_2$

② **Eindeutigkeit:** Ist $L' = v' + \mathbb{R}\omega'$ ebenfalls eine Gerade durch v_1, v_2

↳ v' & ω' sind Vektoren & $\omega' \neq \underline{0}$

Prop 2.2 i) $\Rightarrow$ Wir dürfen $v' = v_1$ annehmen

Da $v_2 \in L'$ gilt: $v_2 = v_1 + r \cdot \omega'$ für ein $r \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow v_1 + r\omega' = v_2 = v_1 + 1\omega \quad \Rightarrow \omega = r\omega'$

$\overset{\text{Prop 2.2}}{\underset{\text{ii)}}{\Longrightarrow}} \quad L = L'$

Bemerkung 2.4

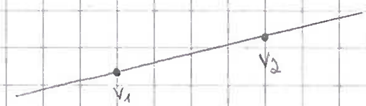
Für die eindeutige Gerade L durch v_1 und v_2 $(v_1 \neq v_2)$ gilt:

$L = \{(1-r)v_1 + r v_2 \mid r \in \mathbb{R}\}$

Beweis:

Korollar 2.3 $\Rightarrow L = v_1 + \mathbb{R}(v_2 - v_1)$

Es gilt für $r \in \mathbb{R}$: $v_1 + r(v_2 - v_1) = (1-r)v_1 + r v_2$



für $r = 0$ erhalte v_1

$r = 0$ v_2

Definition 2.5

(i) Für $v_1, v_2 \in V$ mit $v_1 \neq v_2$ heißt $[v_1, v_2] := \{(1-r)v_1 + r v_2 \mid r \in [0,1]\}$

Strecke zwischen v_1 und v_2

(ii) Für $v_1, v_2 \in V$ heißt $m := \frac{1}{2}(v_1 + v_2)$ der **Mittelpunkt** von v_1 und v_2

(iii) Für $v_1, v_2, v_3 \in V$ drei verschiedene Punkte heißt $m := \frac{1}{3}(v_1 + v_2 + v_3)$

Schwerpunkt von v_1, v_2 & v_3

(iv) Zwei Geraden $L = v + \mathbb{R}\omega$ und $L' = v' + \mathbb{R}\omega'$ heißen **parallel**

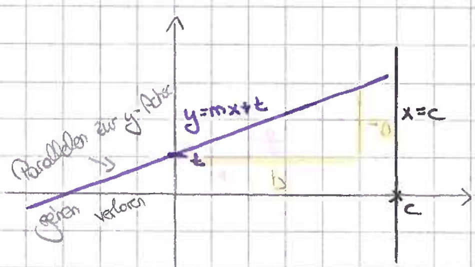
$:\Leftrightarrow \mathbb{R}\omega = \mathbb{R}\omega' \Leftrightarrow \exists r \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ mit $\omega' = r\omega$

Schreibe dafür $L \parallel L'$

⚠ In der axiomatischen Geometrie gibt es eine andere Definition von „parallel" nämlich $g \parallel g' \Leftrightarrow g \cap g' = \emptyset$

Im $\mathbb{R}^2$ stimmen die Definitionen fast überein.

Ziel: Beschreibe Geraden im $\mathbb{R}^2$



allgemein $ax+by=c$

Beachte: $m = \frac{-a}{b}$ für $b \neq 0$

und der Richtungsvektor $w = \binom{b}{-a}$
(für $b \neq 0$ oder $b = 0$)

Satz 1

Sei nun $V = \mathbb{R}^2$ und $L \subseteq \mathbb{R}^2$

L ist eine Gerade $\Leftrightarrow \exists\, a,b,c \in \mathbb{R}$ mit $(a,b) \neq (0,0)$ und
$$L = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid ax+by=c\}$$

Beweis

„$\Leftarrow$" Seien $a,b,c \in \mathbb{R}$ mit $(a,b) \neq (0,0)$ und sei $L = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid ax+by=c\}$

Beachte: $b \neq 0$, dann $ax+by=c \Leftrightarrow y = \frac{-a}{b}x + \frac{c}{b}$

$b = 0$, dann $ax+by=c \Leftrightarrow ax = c \Leftrightarrow x = \frac{c}{a}$

Behauptung:

(1) $b \neq 0 \Rightarrow L = v + \mathbb{R}w$ mit $v = (0, \frac{c}{b})$, $w = (b,-a)$

(2) $b = 0 \Rightarrow L = v + \mathbb{R}w$ mit $v = (0,0)$, $w = (0,1)$

Beweis von (1):

„$\subseteq$" $(x,y) \in L \Rightarrow ax+by=c \overset{b\neq 0}{\Longrightarrow} y = \frac{-a}{b}x + \frac{c}{b} = \frac{c}{b} + \frac{x}{b}\cdot(-a)$

Schreibe $(x,y) = (0,\frac{c}{b}) + t\cdot(b,-a)$, d.h. $x = t\cdot b$ und $y = \frac{c}{b} + t\cdot(-a)$

Dies ist erfüllt für $t = \frac{x}{b}$. Es gilt also $(x,y) = v + tw \Rightarrow (x,y) \in v + \mathbb{R}w$

„$\supseteq$" $(x,y) \in v + \mathbb{R}w \Rightarrow (x,y) = (0,\frac{c}{b}) + t(b,-a)$ für ein $t \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow x = t\cdot b$ und $y = \frac{c}{b} - t\cdot a$

$\Rightarrow ax + by = atb + c - abt = c$

Beweis von (2):

„$\subseteq$" $(x,y) \in L \Rightarrow ax = c \Rightarrow x = \frac{c}{a} \Rightarrow (x,y) = (\frac{c}{a},0) + y(0,1) \overset{t:=y}{=} v + t\cdot w \in v + \mathbb{R}w$

„$\supseteq$" $(x,y) = (\frac{c}{a},0) + t(0,1) \Rightarrow x = \frac{c}{a}$ und $y = t \Rightarrow ax = c \Rightarrow (x,y) \in L$