1. Der Vektorraum $\mathbb{R}^n$

26.10.17

Definition 1.1:

$\mathbb{R}^2 := \{(x,y) \mid x,y \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ = Menge der geordneten Paare reeller Zahlen. $\mathbb{R}^2$ heißt Standardebene

Insbesondere gilt: $(x_1, y_1) = (x_2, y_2) \Leftrightarrow x_1 = x_2$ und $y_1 = y_2$

Bsp: $(1,2) \neq (2,1)$

Definition 1.3

$\mathbb{R}^3 := \{(x,y,z) \mid x,y,z \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ = Menge aller geordneten Tripel reeller Zahlen. $\mathbb{R}^3$ heißt Standardraum

Definition 1.3

0 ist keine natürliche Zahl

Für $n \in \mathbb{N} = \{1,2,3,\dots\}$.

$\mathbb{R}^n := \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \mid x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}\} = \underbrace{\mathbb{R} \times \dots \times \mathbb{R}}_{n\text{-mal}}$ = Menge der geordneten n-Tupel reeller Zahlen. $\mathbb{R}^n$ heißt n-dimensionaler Standardraum

Insbesondere:
- $(x_1, \dots, x_n) = (x_1', \dots, x_n') \Leftrightarrow x_1 = x_1', x_2 = x_2', \dots, x_n = x_n'$
- $\mathbb{R}^n$ ist eine Menge
- Die Elemente daraus heißen Punkte oder auch Vektoren

Definition 1.4

Wir definieren auf $\mathbb{R}^n$ die Addition "+" zweier Vektoren wie folgt:

Für $p = (x_1, \dots, x_n)$ und $q = (y_1, \dots, y_n)$ sei

$$p + q := (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n)$$

Definition 1.5

Wir definieren auf $\mathbb{R}^n$ die Skalarmultiplikation wie folgt:

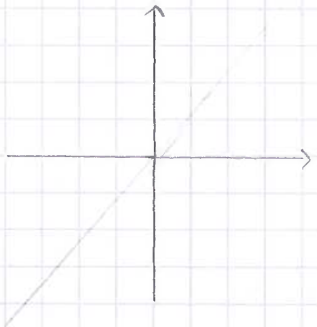
Für $r \in \mathbb{R}$ und $p = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ sei

$$r \cdot p = (r \cdot x_1, r \cdot x_2, \dots, r \cdot x_n)$$

Beispiel 1.6

- $(1,2)+(17,-3)=(18,-1)$
- $3\cdot(2,1)=(6,3)$

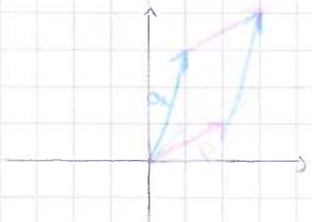
Graphische Darstellung



Multiplikation mit $r\in\mathbb{R}$:

$r>0 \Rightarrow$ Streckung oder Stauchung

$r<0 \Rightarrow$ — " — & Punktspiegelung



Addition $p+q$

Ergänze p und q zu Parallelogramm, falls p und q keine Vielfache voneinander sind

Definition 1.7

(i) $\underline{0} := (0,\dots,0)$ heißt **Nullvektor im $\mathbb{R}^n$**

(ii) Für $q=(x_1,\dots,x_n)$ heißt $-q=(-x_1,\dots,-x_n)$ **negativer bzw. inverser Vektor zu q**

Bem 1.8

Insbesondere gilt $p+-p=\underline{0}$

Proposition 1.9

Für die Vektoraddition und die Skalarmultiplikation im $\mathbb{R}^n$ gelten folgende Rechenregeln:

Für Vektoren u,v,w und $r,s\in\mathbb{R}$

1. a) $u+(v+w)=(u+v)+w$ (Assoziativität)

   b) $u+v=v+u$ (Kommutativität)

   c) $u+\underline{0}=u$ ($\underline{0}$ ist Nullelement)

   d) $u+-u=\underline{0}$ (inverses Element)

   $\left.\right\}$ $(\mathbb{R}^n,+)$ ist abelsche Gruppe

② a) $(r\cdot s)\cdot v = r\cdot(s\cdot v)$ ("Assoziativität") zwei verschiedene Arten von Multiplikation

b) $r\cdot(v+w) = r\cdot v + r\cdot w$ ("Distributivität")

c) $(r+s)\cdot v = r\cdot v + s\cdot v$ ("Distributivität")

d) $1\cdot v = v$ (Multiplikation mit Eins)

Beweis: exemplarisch für 2a

Für $v=(v_1,\dots,v_n)\in\mathbb{R}^n$, $r,s\in\mathbb{R}$ gilt:

$$(r\cdot s)\cdot v = (r\cdot s)\cdot(v_1,\dots,v_n)$$
$$= ((r\cdot s)v_1,\dots,(r\cdot s)v_n)$$
$$= (r\cdot(s\cdot v_1),\dots,r\cdot(s\cdot v_n))$$
$$= r\cdot(sv_1,\dots,sv_n) = r\cdot(s\cdot v)$$

Verwende hier Assoziativität in $\mathbb{R}$

Was ist mit Multiplikation von Vektoren?

Idee: Definiere für $v=(v_1,\dots,v_n)$ $w=(w_1,\dots,w_n)$ in $\mathbb{R}^n$.

$$v\cdot w := (v_1w_1,\dots,v_nw_n)$$

Problem: Da passieren merkwürdige Dinge

z.B. ① $(1,0)\cdot(0,1) = (0,0)$

② $(1,0)\cdot(0,1) = (1,0)\cdot(0,0)$ aber $(0,1)\neq(0,0)$

So etwas wollen wir nicht (zumindest nicht in diesem Kontext)

Später: „Skalarmultiplikation": $\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$

„Spatprodukt": $\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$

Definition 1.10

Ein reeller Vektorraum V ist eine Menge V zusammen mit Abbildungen

$+: V\times V\to V$, $\cdot: \mathbb{R}\times V\to V$

① a) $\forall x,y,z\in V$ gilt: $(x+y)+z = x+(y+z)$ $f(f(x,y),z)=f(x,f(y,z))$

b) $\forall x,y\in V$ gilt: $x+y = y+x$

c) $\exists\, \underline{0}\in V$ mit $\forall x\in V$: $\underline{0}+x = x$

d) $\forall x\in V\ \exists!\, y\in V$ mit $x+y=\underline{0}$

Bezeichne y als $-x$. $-x$ heißt (additives) Inverses

② a) $\forall r,s \in \mathbb{R}, x \in V$ gilt: $(r\cdot s)\cdot x = r\cdot(s\cdot x)$

b) $\forall r \in \mathbb{R}, x,y \in V$ gilt: $r(x+y) = rx + ry$

c) $\forall r,s \in \mathbb{R}, x \in V$: $(r+s)\cdot x = r\cdot x + s\cdot x$

d) $\forall x \in V$: $1\cdot x = x$

Hierbei notieren wir $x+y := +(x,y)$ und $r\cdot x := \cdot(r,x)$

$f: V\times V \to V$
$(x,y) \mapsto f(x,y) =: x+y$

Beispiel 1.11

$V = \mathbb{R}^n$ mit Addition & Skalarmultiplikation ist ein reeller Vektorraum

Definition 1.12:

$P_n := \{p(x) \mid p$ ist reelles Polynom vom Grad $\leq n\}$

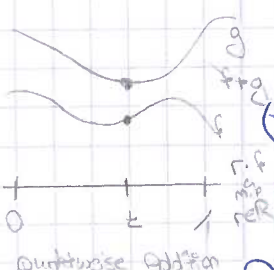
$= \{p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 \mid a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}\}$ man könnte die $p(x)$ auch als n-Tupel schreiben

Betrachte Polynomaddition $p+q$ & Skalarmultiplikation $r\cdot p$ und erhalte damit reellen Vektorraum der Polynome vom Grad $\leq n$

Definition 1.13

$\mathcal{C}([0,1]) = \{f: [0,1] \to \mathbb{R} \mid f$ stetige Funktion$\}$ mit Addition & Mult.

$f+g: [0,1] \to \mathbb{R}, t \mapsto f(t)+g(t)$; $r\cdot f: [0,1] \to \mathbb{R}, t \mapsto r\cdot f(t)$



$(\mathcal{C}([0,1]), +, \cdot)$ heißt reeller Vektorraum der stetigen Funktionen auf $[0,1]$.

Bemerkung 1.14

$(\mathcal{C}([0,1]), +, \cdot)$ ist ein Vektorraum mit Nullvektor $\underline{0}: [0,1] \to \mathbb{R}, t \mapsto 0$

Beweis: Rechenregeln überprüfen