Universität des Saarlandes WS 2017/18
Lehrstuhl für Mathematik und ihre Didaktik
Univ.-Prof. Dr. G. Weitze-Schmithüsen

Analytische Geometrie: Übung 3

In der Vorlesung haben Sie bereits eine abelsche Gruppe kennengelernt: $(\mathbb{R}^n, +)$. *Von einer solchen Struktur verlangt man neben der Abgeschlossenheit (i) – das heißt, dass bei der Verknüpfung zweier Elemente stets ein Element aus der Gruppe entsteht – auch die Assoziativität (ii), die Existenz eines neutralen Elements (iii), Inverse (iv) und die Kommutativität (v). Fordert man lediglich (i) bis (iv), so spricht man von einer Gruppe. Fordert man (i) bis (iii), so handelt sich sich um einen Monoid.*

Aufgabe 1

Prüfen Sie nach, ob es sich bei den folgenden Strukturen um Monoide oder Gruppen bzw. abelsche Gruppen handelt. Nennen Sie auch stets das neutrale Element.

a) $(\mathbb{N},\cdot)$, wobei " $\cdot$ " die bekannte Multiplikation meint

b) $(2\mathbb{Z}, +)$, wobei $2\mathbb{Z} = \{2k | k \in \mathbb{Z}\}$ und die Addition wie auf $(\mathbb{Z}, +)$ definiert ist

c) $(\mathbb{R}^3, \times)$, wobei " $\times$ " das aus der Schule bekannte Kreuzprodukt bezeichnet

d) die Menge der Verschiebungen im $\mathbb{R}^2$ mit der Hintereinanderausführung von Verschiebungen als Verknüpfung

e) die Menge der Geradenspiegelungen im $\mathbb{R}^2$ mit der Hintereinanderausführung von Spiegelungen als Verknüpfung

f) D_3 (die Menge der Deckabbildungen eines gleichseitigen Dreiecks) mit der Hintereinanderausführung von Drehungen bzw. Spiegelungen als Verknüpfung

Aufgabe 2

a) Begründen Sie die Rechenregeln für Vektoren im $\mathbb{R}^2$ auf Basis der Rechenregeln in $\mathbb{R}$.

b) Zeigen oder widerlegen Sie: Die Anzahl der Elemente eines reellen Vektorraums beträgt entweder 1 oder unendlich.

Aufgabe 3

a) Erläutern Sie, dass $C([0,1]) := \{f: [0,1] \to \mathbb{R} \mid f \text{ ist stetige Funktion}\}$ ein reeller Vektorraum ist.

b) Finden Sie ein weiteres Beispiel für einen reellen Vektorraum, das noch nicht in der Vorlesung genannt wurde. Weisen Sie nach, dass es sich dabei um einen solchen handelt.

Aufgabe 4

Aus Ihrer Schulzeit kennen Sie bereits die Parameterdarstellung von geometrischen Objekten wie z. B. Geraden und Ebenen, hier beispielsweise für eine Gerade im $\mathbb{R}^2$ ($\lambda \in \mathbb{R}$):

$$g: \overrightarrow{x} = \overrightarrow{a} + \lambda \cdot \overrightarrow{r}$$

a) Visualisieren Sie diese formale Darstellung für eine beliebige Gerade g im Zweidimensionalen in GeoGebra. Erstellen Sie dazu einen Schieberegler für λ.

b) Erzeugen Sie dieselbe Darstellung im Dreidimensionalen.

c) Visualisieren Sie ebenso die Parameterdarstellung einer Ebene im Dreidimensionalen.