Universität des Saarlandes WS 2017/18
Lehrstuhl für Mathematik und ihre Didaktik
Univ.-Prof. Dr. Weitze-Schmithüsen
Jonas Lotz

Analytische Geometrie: Übung 4

Eine Relation $a \sim b$ bezeichnet eine Beziehung zwischen zwei Objekten einer Menge M, beispielsweise Kongruenz oder Ähnlichkeit von Figuren im $\mathbb{R}^2$. Zwei Objekte, die in Relation miteinander stehen, notiert man häufig als Paar (a, b). Formell ist eine Relation R definiert als Teilmenge von $M \times M$ und wir schreiben $a \sim b :\Leftrightarrow (a, b) \in R$. Von einer Äquivalenzrelation spricht man dann, wenn für alle $a, b, c \in M$ gilt:

$a \sim a$ *(Reflexivität)* $\quad$ $a \sim b \Rightarrow b \sim a$ *(Symmetrie)* $\quad$ $a \sim b \wedge b \sim c \Rightarrow a \sim c$ *(Transitivität)*

Aufgabe 1

Bei Wikipedia finden Sie im Artikel zu Äquivalenzrelationen folgende Liste an Beispielen, durch die gezeigt ist, dass die drei Eigenschaften Reflexivität, Symmetrie und Transitivität unabhängig voneinander sind. Vollziehen Sie die Einordnungen nach und begründen Sie jede einzelne.

Keine der drei Eigenschaften ist erfüllt:

- weder reflexiv noch symmetrisch oder transitiv: $\{(a,b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid a - b = 1\}$ (a ist um 1 größer als b.)

Genau eine der drei Eigenschaften ist erfüllt:

- reflexiv, aber weder symmetrisch noch transitiv: $\{(a,b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid a - b \in \{0,1\}\}$ (a ist höchstens um 1 größer als b.)
- symmetrisch, aber weder reflexiv noch transitiv: $\{(a,b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid |a - b| = 1\}$ (a und b sind benachbart.)
- transitiv, aber weder reflexiv noch symmetrisch: $\{(a,b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid a < b\}$ (a ist kleiner als b.)

Genau zwei der drei Eigenschaften sind erfüllt:

- symmetrisch und transitiv, aber nicht reflexiv: $\{(a,b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid b = a \neq 1\}$ (a ist gleich b und nicht 1.)
- reflexiv und transitiv, aber nicht symmetrisch: $\{(a,b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid a \leq b\}$ (a ist kleiner oder gleich b.)
- reflexiv und symmetrisch, aber nicht transitiv: $\{(a,b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid |a - b| \leq 1\}$ (a und b sind gleich oder benachbart.)

Alle drei Eigenschaften sind erfüllt:

- reflexiv, symmetrisch und transitiv: $\{(a,b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid a = b\}$

https://de.wikipedia.org/wiki/Äquivalenzrelation

Aufgabe 2

Sie haben in der Vorlesung zwei Möglichkeiten kennengelernt, um die Parallelität zweier Geraden zu definieren. Begründen Sie, dass nur eine der beiden eine Äquivalenzrelation ist.

Aufgabe 3

Zeigen Sie: Zwei Gleichungen $ax + by = c$ und $a'x + b'y = c'$ beschreiben die gleiche Gerade in $\mathbb{R}^2$ genau dann, wenn ein $r \in \mathbb{R}^* = \mathbb{R}\backslash\{0\}$ existiert mit $(a, b, c) = r \cdot (a', b', c')$.

Aufgabe 4

Sei V ein reeller Vektorraum, $v \in V$ und $r \in \mathbb{R}$. Begründen Sie mit Hilfe der in der Vorlesung bewiesenen Aussagen und der Vektorraumaxiome:

a) $r \cdot v = 0 \Rightarrow r = 0 \vee v = \underline{0}$ $\qquad$ b) $0 \cdot v = \underline{0}$

Aufgabe 5

Erstellen Sie in GeoGebra ein beliebiges Dreieck mit beweglichen Eckpunkten. Konstruieren Sie Höhenschnittpunkt, Umkreismittelpunkt, Inkreismittelpunkt und Schwerpunkt.

Beobachten Sie die Lage der Punkte, wenn Sie das Dreieck verändern. Was fällt Ihnen auf?