Universität des Saarlandes WS 2017/18
Lehrstuhl für Mathematik und ihre Didaktik
Univ.-Prof. Dr. Weitze-Schmithüsen
Jonas Lotz

Analytische Geometrie: Übung 5

Aufgabe 1

Laut Satz 1 beschreibt $ax + by = c$ mit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ und $a, b, c \in \mathbb{R}$ eine Gerade. Welche geometrischen Objekte werden durch die folgenden Gleichungen beschrieben? Untersuchen Sie dazu die Spezialfälle $(a, b, c) \in \{(1,1,0), (1,-1,0), (1,1,1), (1,-1,1)\}$.

i. $ax^2 + by = c$

ii. $ax + by^2 = c$

iii. $ax^2 + by^2 = c$

Tipp: *Wenn Sie mit Umformungen nicht direkt zum Ziel kommen, können Sie auch zunächst passende Zahlenpaare suchen und diese im Koordinatensystem eintragen.*

Aufgabe 2

Sei $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$, $\lambda \in \mathbb{R}$.
In 3.3 haben Sie die Determinante kennengelernt als die Abbildung $\det : \mathbb{R}^{2\times 2} \to \mathbb{R},\ \det(A) = ad - bc$.

Prüfen Sie mit Hilfe der Determinante nach, ob folgende Gleichungssysteme eine Lösung $\binom{x}{y} \neq \binom{0}{0}$ besitzen und bestimmen sie diese, falls sie existiert.

a) $\begin{aligned} 3x - 6y &= 0 \\ -x + 2y &= 0 \end{aligned}$

b) $x\binom{0}{2} + y\binom{-5}{5} = \underline{0}$

c) $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 12 & 9 \end{pmatrix} \cdot \binom{x}{y} = \binom{0}{0}$

Aufgabe 3

Seien $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^2$.

a) Zeigen Sie, dass die beiden Vektoren genau dann linear abhängig sind, wenn einer der beiden Vektoren ein Vielfaches des anderen ist.

b) Sind die folgenden Vektoren linear unabhängig? Begründen Sie ihre Antwort sowohl mit a) als auch durch Anwendung von Definition 3.1.

i. $\binom{14}{-8}$ und $\binom{-21}{12}$

ii. $\binom{11}{1}$ und $\binom{-2}{-22}$

Aufgabe 4

Sei $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ und falls $\det(A) \neq 0$ sei $B = \frac{1}{\det(A)} \cdot \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$.

a) Zeigen Sie:

i. $\det(A) \neq 0 \Rightarrow B$ ist die inverse Matrix zu A, d. h. $A \cdot B = B \cdot A = I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

ii. $\det(A) = 0 \Rightarrow \nexists C \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ mit $A \cdot C = I$.

iii.

b) Berechnen Sie zu folgenden Matrizen ihre Inversen, falls sie existieren.

i. $\begin{pmatrix} 102 & -9 \\ 32 & -3 \end{pmatrix}$

ii. $\begin{pmatrix} 12 & 1 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$

Aufgabe 5

Begründen Sie die folgenden Eigenschaften.

a) Die Abbildung det ist linear in jeder Zeile, d. h.:

   i. $\det\begin{pmatrix} a+a' & b+b' \\ c & d \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix} a' & b' \\ c & d \end{pmatrix}$ und entsprechend für die zweite Zeile.

   ii. $\det\begin{pmatrix} \lambda a & \lambda b \\ c & d \end{pmatrix} = \lambda \cdot \det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ und entsprechend für die zweite Zeile.

b) Entsteht $A' \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ durch Vertauschung zweier Zeilen von $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$, so gilt $\det(A') = -\det(A)$.

c) Die Abbildung det ist normiert, d. h. $\det(I) = 1$.

d) Begründen Sie mit a) - c): Die Abbildung det ist alternierend, d. h. falls $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ zwei gleiche Zeilen hat, so gilt $\det(A) = 0$.