

1. ÜBUNGSBLATT ZUR LINEAREN ALGEBRA II

Während des gesamten Blattes sei K ein Körper und $n \in \mathbb{N}$ eine natürliche Zahl.

Aufgabe 1. (4P)

Wir definieren die reelle Matrix

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

- Berechnen Sie das charakteristische Polynom, die Eigenwerte und Eigenräume von A ,
- Seien $f_1(X) := (X - 1)^2$, $f_2(X) := (X - 2)^2$, $f_3(X) := (X - 1)^2(X - 2)$. Berechnen Sie $f_i(A)$ und ihre Kerne für $i = 1, 2, 3$. Vergleichen Sie Ihr Ergebnis mit dem Ergebnis aus a).
- Zeigen Sie, dass es kein Polynom $f \in \mathbb{R}[X]$ von Grad 2 mit $f(A) = 0$ gibt.

Aufgabe 2. (4P)

- Sei V ein n -dimensionaler K -Vektorraum und $\phi \in \text{End}(V)$. Zeigen Sie, dass der Untervektorraum

$$U := \langle id_V, \phi, \phi^2, \phi^3, \dots \rangle \subseteq \text{End}(V)$$

höchstens n -dimensional ist.

- Sei $W := \{(a_i)_{i \in \mathbb{N}} \mid a_i \in K\}$ der Vektorraum der Folgen über K und

$$T : W \rightarrow W \quad , \quad (a_1, a_2, \dots) \mapsto (0, a_1, a_2, \dots)$$

der Rechts-shift. Zeigen Sie, dass für $f(X) \in K[X] \setminus \{0\}$ stets $f(T) \neq 0$ gilt.

Aufgabe 3. (4P)

Sei A eine K -Algebra mit Eins und $a \in A$.

- Zeigen Sie, dass die Abbildung $\phi_a : A \rightarrow A$, $x \mapsto a \cdot x$ ein K -Vektorraumhomomorphismus ist. Ist er auch ein Algebrenhomomorphismus?

- b) Zeigen Sie, dass die Abbildung $\varphi_a : K[X] \rightarrow \mathcal{A}$, $f(X) \mapsto f(a)$ ein K -Algebrenhomomorphismus ist.

Aufgabe 4. (4P)

Sei A eine n -dimensionale K -Algebra mit Eins, sprich A hat als K -Vektorraum Dimension n .

- a) Zeigen Sie, dass für jedes $a \in A$ ein $f_a(X) \in K[X] \setminus \{0\}$ existiert, das a als Nullstelle besitzt, d.h. $f_a(a) = 0$ gilt.
- b) Zeigen Sie, dass es einen injektiven K -Algebrenhomomorphismus $\iota : A \rightarrow K^{n \times n}$ gibt, wobei $K^{n \times n}$ mit der üblichen Matrizenmultiplikation ausgestattet ist.

Das Übungsblatt kann bis spätestens Donnerstag den 25. 04. 2019 um 14 Uhr in Abgabekasten 47 im UG des Gebäudes E2.5 eingeworfen werden. Schreiben Sie Namen und Matrikelnummer aller Gruppenmitglieder sowie Ihre Übungsgruppe gut lesbar auf Ihre Abgabe. Sie dürfen alleine oder zu zweit ein Übungsblatt abgeben.