Universität des Saarlandes
FR 6.1 Mathematik
Prof. Dr. G. Weitze-Schmithüsen
M.Sc. C. Steinhart

10. Übungsblatt zur Linearen Algebra II

Während des Blattes sei R ein kommutativer Ring mit Eins, M ein R-Modul und $n \in \mathbb{N}$.

Aufgabe 1. (3P+1P)

a) Geben Sie eine Basis B von der äußeren Algebra $\bigwedge \mathbb{R}^3$ als $\mathbb{R}$-Vektorraum an. Sei $v := e_1 + 2e_2 \wedge e_3$. Bestimmen Sie die Darstellungsmatrix $D_{BB}(\phi)$ der Linksmultiplikation $\phi : \bigwedge \mathbb{R}^3 \to \bigwedge \mathbb{R}^3$, $x \mapsto v \wedge x$.

b) Was ist die Dimension von $\bigwedge \mathbb{R}^n$ als $\mathbb{R}$-Vektorraum.

Aufgabe 2. (4P)

Sei $M = R^n$ und $k \in \mathbb{N}$ mit $k \leq n$.

a) Zeigen Sie, dass für jedes $\phi \in (\bigwedge^k(M))^\star := \mathrm{Hom}_{R\text{-Modul}}(\bigwedge^k(M), R)$ ein eindeutiges $v_\phi \in \bigwedge^{n-k}(M)$ existiert, sodass $\phi(v) = \det(v_\phi \wedge v)$ für alle $v \in \bigwedge^k(M)$ gilt.

b) Zeigen Sie weiterhin, dass

$$\psi : (\bigwedge^k(M))^\star \to \bigwedge^{n-k}(M) \quad , \quad \phi \mapsto v_\phi$$

mit v_ϕ wie in a) ein R-Modul-Isomorphismus ist und folgern Sie daraus $\bigwedge^{n-k}(M) \cong Alt^k_M(R)$ und $\bigwedge^{n-1}(M) \cong M^\star := \mathrm{Hom}_{R\text{-Modul}}(M, R)$.

Aufgabe 3. (2P+2Bonuspunkte+2P)

Seien $A, B, C \in R^{n\times n}$ Matrizen. Zeigen Sie folgende Aussagen:

a) Es gilt $\mathrm{Tr}(AB) = \mathrm{Tr}(BA)$.

b) Es gilt im Allgemeinen **nicht** $\mathrm{Tr}(ABC) = \mathrm{Tr}(ACB)$.

c) Es gilt $\chi_{AB}(X) = \chi_{BA}(X)$.

Das Übungsblatt kann bis spätestens Donnerstag den 27. 06. 2019 um 14 Uhr in Abgabekasten 47 im UG des Gebäudes E2.5 eingeworfen werden. Schreiben Sie Namen und Matrikelnummer aller Gruppenmitglieder sowie Ihre Übungsgruppe gut lesbar auf Ihre Abgabe. Sie dürfen alleine oder zu zweit ein Übungsblatt abgeben.

Aufgabe 4. (3P+1P)

a) Seien U, V, W jeweils R-Moduln. Zeigen Sie, dass $(U \oplus V) \otimes W \cong (U \otimes W) \oplus (V \otimes W)$ gilt.

b) Wir betrachten $\mathbb{Q}$ und $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ als $\mathbb{Z}$-Moduln und $\mathbb{Z}$ als Untermodul von $\mathbb{Q}$. Zeigen Sie, dass die Abbildung

$$\iota : \mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/6\mathbb{Z} \to \mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/6\mathbb{Z} \ , \ \sum_i u_i \otimes v_i \mapsto \sum_i u_i \otimes v_i$$

nicht injektiv ist.

Das Übungsblatt kann bis spätestens Donnerstag den 27. 06. 2019 um 14 Uhr in Abgabekasten 47 im UG des Gebäudes E2.5 eingeworfen werden. Schreiben Sie Namen und Matrikelnummer aller Gruppenmitglieder sowie Ihre Übungsgruppe gut lesbar auf Ihre Abgabe. Sie dürfen alleine oder zu zweit ein Übungsblatt abgeben.