Universität des Saarlandes
FR 6.1 Mathematik
Prof. Dr. G. Weitze-Schmithüsen
M.Sc. C. Steinhart

11. Übungsblatt zur Linearen Algebra II

Aufgabe 1. (4P)

a) Seien $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, \mathcal{C}_3$ drei Kategorien und $F : \mathcal{C}_1 \to \mathcal{C}_2$ und $G : \mathcal{C}_2 \to \mathcal{C}_3$ zwei Funktoren. Zeigen Sie, dass die Verkettung, d.h. Hintereinanderausführung, $H := G \circ F : \mathcal{C}_1 \to \mathcal{C}_3$ der beiden Funktoren wieder ein Funktor ist. Zeigen Sie weiterhin, dass H genau dann kontravariant ist, wenn genau einer der beiden Funktoren kontravariant ist.

b) Sei K ein Körper und $K - VR^{fin}$ die Kategorie der endlich-dimensionalen K-Vektorräume mit linearen Abbildungen als Morphismen. Zeigen Sie, dass Dualisieren, d.h.

$$\begin{aligned} D : K - VR^{fin} &\to K - VR^{fin} \\ V &\mapsto V^* := \mathrm{Hom}(V, K) \\ \mathrm{Hom}(V_1, V_2) \ni \varphi &\mapsto \varphi^* \in \mathrm{Hom}(V_2^*, V_1^*) \text{ mit } \varphi^*(v_2^*) = (V_1 \to K, v \mapsto v_2^*(\varphi(v)) \end{aligned}$$

ein Funktor der Kategorie $K - VR^{fin}$ in sich selbst ist. Ist er ko- oder kontravariant?

Aufgabe 2. (4P)

a) Zeigen Sie, dass sich jede Gruppe G als Kategorie mit einem Objekt P und $\mathrm{Hom}(P, P) = G$ auffassen lässt. Was sind ihre Isomorphismen?

b) Sei R ein Ring mit Eins. Wir setzen $\mathcal{C}$ als die Kategorie mit $\mathrm{Obj}(\mathcal{C}) = R$ und $\mathrm{Mor}(A, B) := \{r \in R \mid Ar = B\}$. Geben Sie eine Verknüpfung der Morphismen an, damit $\mathcal{C}$ eine Kategorie ist.

c) Sei $R = \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ und $\mathcal{C}$ wie in Aufgabenteil b). Zeichnen Sie $\mathcal{C}$ (mit allen Morphismen) und markieren Sie alle Isomorphismen (z.B. in Ihrer Lieblingsfarbe).

Das Übungsblatt kann bis spätestens Donnerstag den 04. 07. 2019 um 14 Uhr in Abgabekasten 47 im UG des Gebäudes E2.5 eingeworfen werden. Schreiben Sie Namen und Matrikelnummer aller Gruppenmitglieder sowie Ihre Übungsgruppe gut lesbar auf Ihre Abgabe. Sie dürfen alleine oder zu zweit ein Übungsblatt abgeben.

Aufgabe 3. (4P)

Wir bezeichnen in einer Kategorie $\mathcal{C}$ einen Morphismus ψ als *epi*, wenn für alle Morphismen ϕ, φ mit $\phi \circ \psi = \varphi \circ \psi$ bereits $\phi = \varphi$ folgt. Entsprechend heißt ψ *mono*, wenn für alle ϕ, φ mit $\psi \circ \phi = \psi \circ \varphi$ bereits $\phi = \varphi$ folgt.

a) Beweisen Sie folgende Aussagen:

   (i) Sind die Objekte einer Kategorie Mengen und die Morphismen Abbildungen mit Hintereinanderausführung als Verknüpfung, so sind alle surjektiven Morphismen epi und alle injektiven Morphismen mono.
   Hinweis: Abbildungen sind bei uns dadurch festgelegt, worauf sie die Elemente abbilden.

   (ii) In der Kategorie kRi der kommutativen Ringe mit Eins mit Ringhomomorphismen ist der (nicht surjektive!) Einbettungshomomorphismus $\mathbb{Z} \hookrightarrow \mathbb{Q}$, $m \mapsto m$ epi.

b) Zeigen oder widerlegen Sie:

   (i) Alle Isomorphismen einer Kategorie sind mono und epi.

   (ii) Alle Morphismen einer Kategorie die mono und epi sind, sind bereits Isomorphismen.

Aufgabe 4. (1.5P+1.5P+1P+2Bonuspunkte)

Ein *initiales Objekt* I einer Kategorie $\mathcal{C}$ ist ein Objekt $I \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C})$, sodass es für jedes Objekt $A \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C})$ genau einen Morphismus von I nach A gibt.
Entsprechend heißt ein Objekt F *terminal*, wenn es für jedes Objekt $A \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C})$ genau einen Morphismus von A nach F gibt.
Ein Objekt heißt *Nullobjekt*, wenn es sowohl initiales als auch terminales Objekt ist.

a) Sei *Set* die Kategorie der Mengen. Zeigen Sie, dass in *Set* die leere Menge das einzige initiale Objekt ist und die terminalen Objekte gerade die einelementigen Mengen sind.

b) Sei *Gr* die Kategorie der Gruppen. Zeigen Sie, dass die triviale Gruppe, d.h. die Gruppe die nur aus dem neutralen Element besteht, ein Nullobjekt in *Gr* ist.

c) Zeigen Sie, dass je zwei initiale Objekte zueinander isomorph sind und je zwei terminale Objekte zueinander isomorph sind.

d) Besitzt eine Kategorie ein Nullobjekt 0, so liefert dieses für je zwei Objekte A und B einen (eindeutigen) Nullmorphismus $0_{A,B} : A \to B$, wobei $0_{A,B}$ die Verkettung des Morphismus von A nach 0 mit dem Morphismus von 0 nach B ist.
Zeigen Sie, dass dieser Nullmorphismus unabhängig von der Wahl des Nullobjekts ist.

Das Übungsblatt kann bis spätestens Donnerstag den 04. 07. 2019 um 14 Uhr in Abgabekasten 47 im UG des Gebäudes E2.5 eingeworfen werden. Schreiben Sie Namen und Matrikelnummer aller Gruppenmitglieder sowie Ihre Übungsgruppe gut lesbar auf Ihre Abgabe. Sie dürfen alleine oder zu zweit ein Übungsblatt abgeben.