Universität des Saarlandes
FR 6.1 Mathematik
Prof. Dr. G. Weitze-Schmithüsen
M.Sc. C. Steinhart

12. Übungsblatt zur Linearen Algebra II

Aufgabe 1. (4P)

a) Sei K ein Körper und $K-VR^{fin}$ die Kategorie der endlich-dimensionalen K-Vektorräume mit linearen Abbildungen als Morphismen und D der Dualisieren-Funktor (s. Blatt 11 Aufgabe 1 b)). Zeigen Sie, dass der Einsetzungshomomorphismus $V \to V^{**}, v \mapsto (\alpha_v : \phi \mapsto \phi(v))$ eine funktorielle Äquivalenz vom Identitätsfunktor zum Bidualisieren-Funktor $D \circ D$ ist. Was ändert sich, wenn wir dies auf der Kategorie $K - VR$ der K-Vektorräume betrachten?

b) Sei $\mathcal{C}$ eine Kategorie und $F : \mathcal{C} \to \underline{Set}$ ein kovarianter Funktor mit darstellendem Objekt $A \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C})$. Zeigen Sie: Ist $B \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C})$ ein weiteres darstellendes Objekt von F, dann gibt es einen Isomorphismus zwischen A und B.

Aufgabe 2. (1P+2P+1P)

a) Zeigen Sie, dass

$$\begin{array}{llll} \mathcal{F}: & \underline{Set} & \to \underline{Set} & \\ & M & \mapsto \mathcal{P}(M) := \{U \mid U \subseteq M\} & (= \text{Potenzmenge von } M) \\ & \mathrm{Abb}(M,N) \ni f & \mapsto f^{-1} \in \mathrm{Abb}(\mathcal{P}(N), \mathcal{P}(M)) & (= \text{Urbildabbildung von } f) \end{array}$$

einen kontravarianten Funktor definiert.

b) Wie für kovariante Funktoren definieren wir auch für kontravariante Funktoren funktorielle Äquivalenz und darstellende Objekte. Zeigen Sie, dass $\mathcal{F}$ darstellbar mit darstellendem Objekt $\{0,1\}$ ist, d.h. geben Sie (mit Beweis) eine funktorielle Äquivalenz $\alpha : \mathcal{F} \to {}_{\{0,1\}}\mathrm{hom}$ an.

c) Zeigen Sie, dass funktorielle Äquivalenzen zu darstellenden Objekten nicht notwendigerweise eindeutig sind, indem Sie eine zweite funktorielle Äquivalenz $\beta : \mathcal{F} \to {}_{\{0,1\}}\mathrm{hom}$ angeben.

Das Übungsblatt kann bis spätestens Donnerstag den 11. 07. 2019 um 14 Uhr in Abgabekasten 47 im UG des Gebäudes E2.5 eingeworfen werden. Schreiben Sie Namen und Matrikelnummer aller Gruppenmitglieder sowie Ihre Übungsgruppe gut lesbar auf Ihre Abgabe. Sie dürfen alleine oder zu zweit ein Übungsblatt abgeben.

Aufgabe 3. (2P+2P+2Bonuspunkte)

a) Sei G eine Gruppe mit 15 Elementen, die auf einer Menge X mit 7 Elementen operiert. Zeigen Sie, dass G mindestens einen Fixpunkt hat, d.h. ein Element $x \in X$ mit $g \bullet x = x$ für alle $g \in G$.

b) Sei G eine Gruppe, die transitiv auf einer Menge X operiert. Zeigen Sie, dass alle Stabilisatoren isomorph zueinander sind, d.h. für $x, y \in X$ gilt $\mathrm{Stab}_G(x) \cong \mathrm{Stab}_G(y)$.

c) Ein Ikosaeder ist ein zwanzigseitiger Würfel dessen nicht unterscheidbare Seiten aus gleichseitigen Dreiecken besteht. Berechnen Sie die Anzahl der Elemente der Symmetriegruppe des Ikosaeders mithilfe der Bahnbilanzformel.
Hinweis: Ein Ikosaeder ist auch spiegelsymmetrisch.

Aufgabe 4. (1P+1P+2P)

Sei K ein Körper und $n, r \in \mathbb{N}$ mit $r \leq n$. Wir bezeichnen mit

$$Gr(r, K^n) := \{V \mid V \text{ Untervektorraum von } K^n \text{ mit } \dim(V) = r\}$$

die Menge der r-dimensionalen Untervektorräume von K^n. Auf $Gr(r, K^n)$ definiert für $V \in Gr(r, K^n)$

$$A \bullet V := \{Av \mid v \in V\}$$

eine Gruppenoperation von $\mathrm{GL}_n(K)$ auf $Gr(r, K^n)$.

a) Bestimmen Sie die Anzahl der Bahnen und den Stabilisator von $V :=< e_1, \ldots, e_r >$ wobei wie immer $\{e_1, \ldots, e_n\}$ die Standardbasis bezeichnet.

b) Ist die Operation für $r \neq n$ treu? Begründen Sie Ihre Aussage.

c) Sei nun K ein Körper mit q Elementen. Zeigen Sie mithilfe der Bahnformel und Induktion, dass $\prod_{i=0}^{n-1}(q^n - q^i)$ die Ordnung von $\mathrm{GL}_n(K)$ ist.

Aufgabe 5. (2 Bonuspunkte)

Sei X eine n-elementige Menge. Ergänzen Sie

$$\begin{aligned} \mathcal{F} : \underline{Gr} &\rightarrow \underline{Set} \\ G &\mapsto Akt(G, X) := \text{Menge der Gruppenaktionen von } G \text{ auf } X \end{aligned}$$

zu einem kontravarianten Funktor mit darstellendem Objekt S_n. Begründen Sie, warum S_n ein darstellendes Objekt zu $\mathcal{F}$ ist.

Das Übungsblatt kann bis spätestens Donnerstag den 11. 07. 2019 um 14 Uhr in Abgabekasten 47 im UG des Gebäudes E2.5 eingeworfen werden. Schreiben Sie Namen und Matrikelnummer aller Gruppenmitglieder sowie Ihre Übungsgruppe gut lesbar auf Ihre Abgabe. Sie dürfen alleine oder zu zweit ein Übungsblatt abgeben.