Universität des Saarlandes
FR 6.1 Mathematik
Prof. Dr. G. Weitze-Schmithüsen
M.Sc. C. Steinhart

13. Übungsblatt zur Linearen Algebra II

Aufgabe 1. (2P+1P+1P)

a) Sei $R = C(\mathbb{R})$ der Ring der stetigen Funktionen von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$ mit punktweiser Verknüpfung, d.h. für $f, g \in R$ gilt $(f \cdot g)(x) := f(x) \cdot g(x)$. Welche der folgenden Mengen sind Primideale?

(i) $I_1 := \{f \in R \mid f(42) = f(0)\}$

(ii) $I_2 := \{f \in R \mid f(42) = 0\}$

(iii) $I_3 := \{f \in R \mid f(42) \neq 0\} \cup \{0\}$

(iv) $I_4 := \{0\}$

b) Sei R ein kommutativer Ring $a \in R$ und $I = aR$ ein Hauptideal. Zeigen Sie, I ist genau dann ein Primideal, wenn a prim ist.

c) Sei nun R ein faktorieller Ring und I, J Hauptideale in R. Zeigen Sie, dass dann auch $I \cap J$ ein Hauptideal ist.

Aufgabe 2. (5P)

Wir definieren für den Ring $\mathbb{Z}[\sqrt{-3}] := \{a + b\sqrt{-3} \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$ die Norm

$$|\cdot| : \mathbb{Z}[\sqrt{-3}] \to \mathbb{N}_0 \ , \ |a + b\sqrt{-3}| := a^2 + 3b^2.$$

a) Zeigen Sie, dass $|\cdot|$ multiplikativ ist, d.h. für $x, y \in \mathbb{Z}[\sqrt{-3}]$ gilt $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$.

b) Zeigen Sie, dass die Einheiten in $\mathbb{Z}[\sqrt{-3}]$ genau die Elemente mit Norm 1 sind. Bestimmen Sie $\mathbb{Z}[\sqrt{-3}]^\times$.

c) Folgern Sie, dass 2 und $1 + \sqrt{-3}$ irreduzibel sind.
Hinweis: Zeigen Sie, dass es kein Element der Norm 2 in $Z[\sqrt{-3}]$ *gibt.*

d) Zeigen Sie, dass 2 und $1 + \sqrt{-3}$ nicht prim sind.

e) Zeigen Sie, dass 4 und $2(1 + \sqrt{-3})$ keinen ggT besitzen.

Das Übungsblatt kann bis spätestens Donnerstag den 18. 07. 2019 um 14 Uhr in Abgabekasten 47 im UG des Gebäudes E2.5 eingeworfen werden. Schreiben Sie Namen und Matrikelnummer aller Gruppenmitglieder sowie Ihre Übungsgruppe gut lesbar auf Ihre Abgabe. Sie dürfen alleine oder zu zweit ein Übungsblatt abgeben.

Aufgabe 3. (4P)

Wir betrachten $\mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$ als $\mathbb{R}$-Vektorraum mit Orthonormalbasis $\{1, i\}$ zum Skalarprodukt $< a+bi, c+di >:= ac+bd$. Die von $< \cdot, \cdot >$ induzierte Norm $|x| := \sqrt{< x, x >}$ ist die übliche Norm auf $\mathbb{C}$. Es sei $\mathbb{Z}[i] := \{a+bi \mid a, b \in \mathbb{Z}\} \subseteq \mathbb{C}$ der Ring der Gaußschen Zahlen.

a) Für $r \in \mathbb{R}$ und $x \in \mathbb{C}$ sei $B_r(x) := \{y \in \mathbb{C} \mid |x-y| < r\}$ die Kugel um x mit Abstand r. Zeigen Sie, dass $\mathbb{C} = \bigcup_{x \in \mathbb{Z}[i]} B_1(x)$ gilt.

b) Sei $x = a+bi \in \mathbb{C}$, $r = |x|$ und $A := \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$. Zeigen Sie, dass x und ix orthogonal sind und folgern Sie, dass A Kugeln auf Kugeln abbildet, d.h. für $z \in \mathbb{C}$ gilt $A \cdot B_1(z) = B_r(Az)$.

c) Sei $x \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ und $\Gamma := \{ax+bix \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$. Folgern Sie aus a) und b), dass $\mathbb{C} = \bigcup_{z \in \Gamma} B_r(z)$ gilt.

d) Folgern Sie, dass $\mathbb{Z}[i]$ mit der Abbildung $\varphi : \mathbb{Z}[i] \to \mathbb{N}_0\ ,\ x \mapsto < x, x >$ ein euklidischer Ring ist.

Aufgabe 4. (3P)

Berechnen Sie mit Hilfe des euklidischen Algorthmus den ggT von

$$f(X) = 4X^6 + 2X^5 + 6X^4 + 4X^3 + 3X^2 + 2X + 1$$
$$\text{und } g(X) = 2X^4 + X^3 + 3X^2 + X + 1$$

in $\mathbb{R}[X]$ und finden Sie $h_1(X), h_2(X) \in \mathbb{R}[X]$ mit $\mathrm{ggT}(f(X), g(X)) = h_1(X)f(X) + h_2(X)g(X)$.

Das Übungsblatt kann bis spätestens Donnerstag den 18. 07. 2019 um 14 Uhr in Abgabekasten 47 im UG des Gebäudes E2.5 eingeworfen werden. Schreiben Sie Namen und Matrikelnummer aller Gruppenmitglieder sowie Ihre Übungsgruppe gut lesbar auf Ihre Abgabe. Sie dürfen alleine oder zu zweit ein Übungsblatt abgeben.