Universität des Saarlandes
FR 6.1 Mathematik
Prof. Dr. G. Weitze-Schmithüsen
M.Sc. C. Steinhart

2. Übungsblatt zur Linearen Algebra II

Aufgabe 1. (4P)

Sei K ein Körper und $n \in \mathbb{N}$.

a) Geben Sie jeweils mit einer kurzen Begründung an, welche der Mengen Ideale in $K[X]$ sind:

(i) $I_1 := \{f \in K[X] \mid \deg(f) \geq n\}$

(ii) $I_2 := \{f \in K[X] \mid \deg(f) \leq n\}$

(iii) $I_3 := \{f(X) = \sum_{i=n}^{k} a_i X^i \in K[X] \mid k \geq n, a_n, \ldots, a_k \in K\}$

b) Geben Sie im Polynomring $\mathbb{Z}[X]$ ein Ideal an, das kein Hauptideal ist.

Aufgabe 2. (1P+1P+2P)

Seien R ein kommutativer Ring mit Eins, $f, g \in R$ zwei Elemente und $I = Rf$ bzw. $J = Rg$ die von ihnen erzeugten Ideale.

a) Zeigen Sie: f teilt g genau dann, wenn $J \subseteq I$ gilt.

b) Sei $I + J := \{af + bg \mid a, b \in R\}$ das von f und g erzeugte Ideal. Zeigen Sie, dass jedes Ideal das f und g enthält auch $I + J$ enthält.

c) Wir nennen ein Element $h \in R$ den größten gemeinsamen Teiler von f und g und schreiben $h = \mathrm{ggT}(f, g)$ genau dann, wenn h ein Teiler von f und g ist und jedes Element $\tilde{h} \in R$ das f und g teilt auch h teilt.
Sei nun R ein Hauptidealring. Zeigen Sie folgende Äquivalenz:

$$h = \mathrm{ggT}(f, g) \iff I + J = Rh$$

Bemerkung: Der ggT *ist nur bis auf Multiplikation mit Einheiten eindeutig!*

Aufgabe 3. (4P + 2 Bonuspunkte)

a) Gegeben sei die nilpotente reelle Matrix

$$A := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 3 & 2 & -2 & 1 & -2 \\ -1 & -1 & 1 & 0 & 1 \\ 4 & 3 & -3 & 1 & -3 \\ 4 & 3 & -3 & 1 & -4 \end{pmatrix}.$$

Geben Sie zwei nichttriviale A-invariante Unterräume $U_1, U_2 \subsetneq \mathbb{R}^5$ an, die zueinander komplementär sind, d.h. es gilt $\mathbb{R}^5 = U_1 \oplus U_2$.

Das Übungsblatt kann bis spätestens Donnerstag den 02. 05. 2019 um 14 Uhr in Abgabekasten 47 im UG des Gebäudes E2.5 eingeworfen werden. Schreiben Sie Namen und Matrikelnummer aller Gruppenmitglieder sowie Ihre Übungsgruppe gut lesbar auf Ihre Abgabe. Sie dürfen alleine oder zu zweit ein Übungsblatt abgeben.

b) Sei $V := \{(a_i)_{i\in\mathbb{N}} \mid a_i \in \mathbb{R}, \exists m \in \mathbb{N} : a_i = 0 \text{ für } i > m\}$ der Vektorraum der endlichen reellen Folgen und

$$L : V \to V \quad , \quad (a_1, a_2, a_3, \dots) \mapsto (a_2, a_3, \dots)$$

der Linksshift. Zeigen Sie, dass L nicht nilpotent ist, aber für jedes $v \in V$ ein $k \in \mathbb{N}$ mit $L^k(v) = 0$ existiert.

Aufgabe 4. (4P)

Sei V ein endlich dimensionaler $\mathbb{C}$-Vektorraum, $\phi \in \mathrm{End}(V)$ mit Eigenwerten $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{C}$ und $f \in \mathbb{C}[X]$ ein Polynom mit $f(\lambda_i) \neq 0$ für alle $i = 1, \dots, n$. Zeigen Sie, dass dann $f(\phi)$ ein Automorphismus von V ist.

Das Übungsblatt kann bis spätestens Donnerstag den 02. 05. 2019 um 14 Uhr in Abgabekasten 47 im UG des Gebäudes E2.5 eingeworfen werden. Schreiben Sie Namen und Matrikelnummer aller Gruppenmitglieder sowie Ihre Übungsgruppe gut lesbar auf Ihre Abgabe. Sie dürfen alleine oder zu zweit ein Übungsblatt abgeben.