Universität des Saarlandes
FR 6.1 Mathematik
Prof. Dr. G. Weitze-Schmithüsen
M.Sc. C. Steinhart

3. Übungsblatt zur Linearen Algebra II

Während des gesamten Blattes sei K ein Körper, $\lambda \in K, n \in \mathbb{N}$ eine natürliche Zahl und V ein K-Vektorraum.

Aufgabe 1. (4P)

Bestimmen Sie die jordansche Normalform der reellen Matrix

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & -2 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & -2 & -1 & 2 \\ -4 & 0 & 4 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

und eine Matrix $S \in \mathrm{GL}(5, \mathbb{R})$ oder ihr Inverses, sodass SAS^{-1} jordansche Normalform hat.

Aufgabe 2. (4P)

Manchmal werden die Einsen in der jordanschen Normalform auch auf der oberen Nebendiagonale geschrieben, sprich die Jordankästchen haben dann die Form

$$\widetilde{J_n}(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & & 0 & \lambda \end{pmatrix} = J_n(\lambda)^t.$$

a) Zeigen Sie, dass die beiden Jordankästchen ähnlich zueinander sind, indem Sie eine Basiswechselmatrix $S \in \mathrm{GL}_n(K)$ mit $J_n(\lambda) = S\widetilde{J_n}(\lambda)S^{-1}$ angeben.

b) Folgern Sie für eine komplexe Matrix $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$, dass A ähnlich zu ihrer Transponierten A^t ist. (***Bemerkung:*** *Das gilt übrigens für alle Körper.*)

Das Übungsblatt kann bis spätestens Donnerstag den 09. 05. 2019 um 14 Uhr in Abgabekasten 47 im UG des Gebäudes E2.5 eingeworfen werden. Schreiben Sie Namen und Matrikelnummer aller Gruppenmitglieder sowie Ihre Übungsgruppe gut lesbar auf Ihre Abgabe. Sie dürfen alleine oder zu zweit ein Übungsblatt abgeben.

Aufgabe 3. (4P)

a) Sei $A \in K^{5\times 5}$ eine Matrix mit Minimalpolynom $MP_A(X) = (X-\lambda)^3$. Bestimmen Sie die möglichen Dimensionen der Eigenräume von A und geben Sie jeweils eine Beispielsmatrix an.

b) Sei $\phi \in \mathrm{End}(V)$ ein Endomorphismus mit folgenden Eigenschaften:

- Das charakteristische Polynom von ϕ ist $CP_\phi(X) = (X-3)^3(X-2)^2X^6$.
- Das Minimalpolynom von ϕ ist $MP_\phi(X) = (X-3)^2(X-2)X^3$.
- Der Kern von ϕ ist dreidimensional.

Bestimmen Sie die jordansche Normalform von ϕ.

Aufgabe 4. (4P)

Sei $\phi \in \mathrm{Aut}(V)$ ein Automorphismus von V mit Minimalpolynom $MP_\phi(X) = \sum_{i=0}^{n} a_i X^i$.

a) Zeigen Sie, dass $f(X) = X^n + \frac{1}{a_0}\sum_{i=0}^{n-1} a_{n-i}X^i$ das Minimalpolynom der Inversen ist.

b) Habe nun ϕ die jordansche Normalform

$$\begin{pmatrix} J_{i_1}(\lambda_1) & & & \\ & J_{i_2}(\lambda_2) & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_{i_k}(\lambda_k) \end{pmatrix}.$$

Zeigen Sie, dass die jordansche Normalform von ϕ^{-1} von der Form

$$\begin{pmatrix} J_{i_1}(\lambda_1^{-1}) & & & \\ & J_{i_2}(\lambda_2^{-1}) & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_{i_k}(\lambda_k^{-1}) \end{pmatrix}.$$

ist. Sie dürfen aus LA1 verwenden, dass $\mathrm{Spec}(\phi^{-1}) = \{\lambda^{-1} \mid \lambda \in \mathrm{Spec}(\phi)\}$ gilt.
Hinweis: Gehen Sie anfangs davon aus, dass die jordansche Normalform aus einem Kästchen besteht und verwenden Sie Teil a).

Das Übungsblatt kann bis spätestens Donnerstag den 09. 05. 2019 um 14 Uhr in Abgabekasten 47 im UG des Gebäudes E2.5 eingeworfen werden. Schreiben Sie Namen und Matrikelnummer aller Gruppenmitglieder sowie Ihre Übungsgruppe gut lesbar auf Ihre Abgabe. Sie dürfen alleine oder zu zweit ein Übungsblatt abgeben.