Universität des Saarlandes
FR 6.1 Mathematik
Prof. Dr. G. Weitze-Schmithüsen
M.Sc. C. Steinhart

4. Übungsblatt zur Linearen Algebra II

Während des Blattes sei $K = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$ eine natürliche Zahl und $A \in K^{n\times n}$ eine Matrix.

Aufgabe 1. (4P)

Berechnen Sie A^{42} für die Matrix

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & -2 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & -2 & -1 & 2 \\ -4 & 0 & 4 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Erinnerung: Nach letztem Blatt kennen wir die JNF und zugehörige Basiswechselmatrix von A:

$$S = \frac{1}{8}\begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -8 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 6 & 2 & -3 & 0 & 2 \\ -32 & 0 & 16 & 0 & -8 \\ -32 & -8 & 16 & 8 & -8 \end{pmatrix} \text{ mit Inverser } S^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{und } SAS^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Für einen kommutativen Ring gilt $(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k$ mit $\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!}$.

Das Übungsblatt kann bis spätestens Donnerstag den 16. 05. 2019 um 14 Uhr in Abgabekasten 47 im UG des Gebäudes E2.5 eingeworfen werden. Schreiben Sie Namen und Matrikelnummer aller Gruppenmitglieder sowie Ihre Übungsgruppe gut lesbar auf Ihre Abgabe. Sie dürfen alleine oder zu zweit ein Übungsblatt abgeben.

Aufgabe 2. (4P)

Gegeben sei die Matrix

$$A := \begin{pmatrix} \sqrt{7} & 0 & \sqrt{7} & \sqrt{7} \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Berechnen Sie die Singulärwertzerlegung von A, d.h. finden Sie unitäre Matrizen U und $W \in U(\mathbb{C})$, sodass $W^*AU = \Sigma := \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & 0 \end{pmatrix}$ für $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{C}$ gilt.

Aufgabe 3. (2P+2P+2Bonuspunkte)

Sei A^+ eine Pseudoinverse zu A, d.h. A^+ erfüllt $AA^+A = A$ und $A^+AA^+ = A^+$.

a) Zeigen Sie, wenn das Gleichungssystem $Ax = b$ eine Lösung besitzt, dann ist $x_s := A^+b$ eine Lösung des Gleichungssystems.

b) Zeigen Sie, dass der Kern von A^+ ein Komplement vom Bild von A in K^n ist.

c) Zeigen Sie, dass die Pseudoinverse genau dann eindeutig ist, wenn A bereits invertierbar ist und dass dann $A^+ = A^{-1}$ gilt.

Aufgabe 4. (2P+2P+2Bonuspunkte)

Für eine Matrix $A \in K^{n\times n}$ bezeichnet $\sqrt{A} \in K^{n\times n}$ eine Wurzel von A, d.h. es gilt $\sqrt{A} \cdot \sqrt{A} = A$.

a) Sei A eine normale Matrix. Zeigen Sie, dass A für $K = \mathbb{C}$ eine Wurzel besitzt.

b) Berechnen Sie eine Wurzel von

$$A := \begin{pmatrix} 2 & \sqrt{2} & 0 \\ \sqrt{2} & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

c) Gegeben seien die Matrizen

$$N_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad N_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Zeigen Sie, dass N_1 keine Wurzel besitzt und finden Sie eine Wurzel von N_2.

Das Übungsblatt kann bis spätestens Donnerstag den 16. 05. 2019 um 14 Uhr in Abgabekasten 47 im UG des Gebäudes E2.5 eingeworfen werden. Schreiben Sie Namen und Matrikelnummer aller Gruppenmitglieder sowie Ihre Übungsgruppe gut lesbar auf Ihre Abgabe. Sie dürfen alleine oder zu zweit ein Übungsblatt abgeben.