Universität des Saarlandes
FR 6.1 Mathematik
Prof. Dr. G. Weitze-Schmithüsen
M.Sc. C. Steinhart

5. Übungsblatt zur Linearen Algebra II

Aufgabe 1. (4P+2Bonuspunkte)

Sei $K = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$ und $V := \{(a_i)_{i\in\mathbb{N}} \mid a_i \in K, \exists m \in \mathbb{N} : a_i = 0 \text{ für } i > m\}$ der Vektorraum der endlichen Folgen über K.

a) Wir betrachten auf V das Skalarprodukt

$$< (a_i)_{i\in\mathbb{N}}, (b_i)_{i\in\mathbb{N}} >:= \sum_{i\in\mathbb{N}} a_i\overline{b_i}$$

und die Endomorphismen

$$\begin{aligned} \phi :&V \to V \quad , \quad (a_i)_{i\in\mathbb{N}} \mapsto (\sum_{i\in\mathbb{N}} a_i, 0, 0, \dots) \\ L :&V \to V \quad , \quad (a_1, a_2, \dots) \mapsto (a_2, a_3, \dots) \end{aligned}$$

Zeigen Sie, dass ϕ keine Adjungierte hat und berechnen Sie die Adjungierte vom Linksshift L.

b) Zeigen Sie, dass V^* isomorph ist zum Raum der (unendlichen) Folgen über K. Folgern Sie hieraus, dass im Allgemeinen $V \ncong V^*$ gilt.

Aufgabe 2. (4P)

a) Gegeben sei die Abbildung

$$\phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \quad , \quad v \mapsto \begin{pmatrix} -6 & 2 & -12 \\ 6 & -1 & 12 \\ 4 & -1 & 8 \end{pmatrix} v.$$

Geben Sie ein Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^3$ an, so dass ϕ normal ist.

b) Geben Sie eine Abbildung $\psi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ an, die für kein Skalarprodukt normal ist. Begründen Sie wie immer Ihre Antwort.

Das Übungsblatt kann bis spätestens Donnerstag den 23. 05. 2019 um 14 Uhr in Abgabekasten 47 im UG des Gebäudes E2.5 eingeworfen werden. Schreiben Sie Namen und Matrikelnummer aller Gruppenmitglieder sowie Ihre Übungsgruppe gut lesbar auf Ihre Abgabe. Sie dürfen alleine oder zu zweit ein Übungsblatt abgeben.

Aufgabe 3. (2P+2P+2Bonuspunkte)

Sei K ein Körper, V, W zwei beliebige K-Vektorräume und $\phi : V \to W$ eine lineare Abbildung. Zeigen Sie folgende Aussagen:

a) $\phi^* : W^* \to V^* \ , \ w^* \mapsto w^* \circ \phi$ ist ein Vektorraumhomomorphismus.

b) ϕ ist surjektiv $\Leftrightarrow$ ϕ^* ist injektiv

c) ϕ ist injektiv $\Leftrightarrow$ ϕ^* ist surjektiv.

Hinweis: Sie dürfen hier Basisergänzung und lineare Fortsetzung auch für beliebige Vektorräume verwenden. D.h. für eine linear unabhängige Menge $U \subset V$ existiert eine Basis B von V mit $U \subset B$ und es gibt die natürliche Bijektion $\mathrm{Hom}_{K-VR}(V, W) \leftrightarrow \mathrm{Abb}(B, W)$.

Aufgabe 4. (4P)

Sei $P_n := \{p(X) \in \mathbb{R}[X] \mid \deg(p(X)) \leq n\}$ der Vektorraume der reellen Polynome von Grad kleiner gleich n.

a) Zeigen Sie, dass die Abbildungen

$$\begin{aligned} v_1^* : P_2 \to \mathbb{R} \quad &, \quad p(X) \mapsto \int_0^1 p(X)dx \\ v_2^* : P_2 \to \mathbb{R} \quad &, \quad p(X) \mapsto \int_{-1}^0 p(X)dx \\ v_3^* : P_2 \to \mathbb{R} \quad &, \quad p(X) \mapsto p(1) \end{aligned}$$

eine Basis von P_2^* bilden.

b) Schreiben Sie $v_4^* : P_2 \to \mathbb{R}\ ,\ p(X) \mapsto p'(2)$ als Linearkombination von v_1^*, v_2^* und v_3^*.

Das Übungsblatt kann bis spätestens Donnerstag den 23. 05. 2019 um 14 Uhr in Abgabekasten 47 im UG des Gebäudes E2.5 eingeworfen werden. Schreiben Sie Namen und Matrikelnummer aller Gruppenmitglieder sowie Ihre Übungsgruppe gut lesbar auf Ihre Abgabe. Sie dürfen alleine oder zu zweit ein Übungsblatt abgeben.