Universität des Saarlandes
FR 6.1 Mathematik
Prof. Dr. G. Weitze-Schmithüsen
M.Sc. C. Steinhart

6. Übungsblatt zur Linearen Algebra II

Während des Blattes sei K ein Körper und $V_1, \dots, V_n, V, W$ K-Vektorräume.

Aufgabe 1. (2P)

Seien V^{**}, W^{**} die Bidualräume von V und W und weiterhin

$$\begin{aligned} \Lambda_V : V \to V^{**} \quad , v \mapsto \lambda_v \quad &\text{mit} \quad \lambda_v : V^* \to K \quad , f \mapsto f(v) \\ \Lambda_W : W \to W^{**} \ , w \mapsto \lambda_w \quad &\text{mit} \quad \lambda_w : W^* \to K \ , f \mapsto f(w) \end{aligned}$$

die Einsetzungshomomorphismen aus der Vorlesung. Für einen Homomorphismus

$$\phi : V \to W \quad \text{sei} \quad \phi^{**} := (\phi^*)^* : V^{**} \to W^{**}$$

der von ϕ induzierte Homomorphismus wie in Übungsblatt 5 Aufgabe 3.
Zeigen Sie, dass folgendes Diagramm kommutiert, d.h. es gilt $\phi^{**} \circ \Lambda_V = \Lambda_W \circ \phi$.

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "\Lambda_V"] \arrow[d, "\phi"'] & V^{**} \arrow[d, "\phi^{**}"] \\ W \arrow[r, "\Lambda_W"] & W^{**} \end{tikzcd}$$

Aufgabe 2. (4P)

Wir können zwei multilineare Abbildungen

$$\beta_1 : \underbrace{V \times \dots \times V}_{n_1-mal} \to V$$
$$\beta_2 : \underbrace{V \times \dots \times V}_{n_2-mal} \to V$$

für ein $k \in [n_1] := \{1, \dots, n_1\}$ wie folgt verknüpfen:

$$\begin{aligned} \beta_1 \circ_k \ \beta_2 : \underbrace{V \times \dots \times V}_{n_1+n_2-1-mal} &\to V \\ (v_1, \dots, v_{n_1+n_2-1}) &\mapsto \beta_1(v_1, \dots, v_{k-1}, \beta_2(v_k, \dots, v_{k+n_2-1}), v_{k+n_2}, \dots, v_{n_2+n_1-1}) \end{aligned}$$

Sprich wir setzen β_2 an der k-ten Stelle von β_1 ein.

a) Zeigen Sie, dass $\beta_1 \circ_k \beta_2$ eine multilineare Abbildung ist.

b) Eine bilineare Abbildung $\beta : V \times V \to V$ kann man auch als Verknüpfung $v \star w := \beta(v, w)$ auf V betrachten. Zeigen Sie, dass $\star$ genau dann assoziativ ist, wenn $\beta \circ_1 \beta = \beta \circ_2 \beta$ gilt.

Das Übungsblatt kann bis spätestens Mittwoch den 29. 05. 2019 um 16 Uhr in Abgabekasten 47 im UG des Gebäudes E2.5 eingeworfen werden. Schreiben Sie Namen und Matrikelnummer aller Gruppenmitglieder sowie Ihre Übungsgruppe gut lesbar auf Ihre Abgabe. Sie dürfen alleine oder zu zweit ein Übungsblatt abgeben.

Aufgabe 3. (4P)

Sei $M : \underbrace{V \times \cdots \times V}_{n-mal} \to W$ eine alternierende Abbildung.

a) Zeigen Sie, sind $v_1, \dots v_n \in V$ linear abhängig, dann gilt $M(v_1, \dots, v_n) = 0$.

b) Sei nun zusätzlich $\dim(V) = n$. Zeigen Sie, dass ein $w \in W$ mit $M(\cdot) = w \det(\cdot)$ existiert.

Aufgabe 4. (4P)

a) Zeigen Sie, dass für jedes $\phi \in \mathrm{Hom}(V, W^*)$ genau ein $\tilde{\phi} \in \mathrm{Hom}(V \otimes_K W, K)$ existiert, sodass $\phi(v)(w) = \tilde{\phi}(v \otimes_K w)$ gilt.

b) Zeigen Sie, dass die Abbildung

$$\Psi : \mathrm{Hom}(V, W^*) \to \mathrm{Hom}(V \otimes_K W, K) \quad , \quad \phi \mapsto \tilde{\phi}$$

ein Vektorraumisomorphismus ist.

Bemerkung: Sie dürfen hier verwenden, dass das Tensorprodukt für alle Vektorräume V, W existiert. Alternativ dürfen Sie hier davon ausgehen, dass V und W endlich-dimensional sind.

Das Übungsblatt kann bis spätestens Mittwoch den 29. 05. 2019 um 16 Uhr in Abgabekasten 47 im UG des Gebäudes E2.5 eingeworfen werden. Schreiben Sie Namen und Matrikelnummer aller Gruppenmitglieder sowie Ihre Übungsgruppe gut lesbar auf Ihre Abgabe. Sie dürfen alleine oder zu zweit ein Übungsblatt abgeben.