Universität des Saarlandes
FR 6.1 Mathematik
Prof. Dr. G. Weitze-Schmithüsen
M.Sc. C. Steinhart

7. Übungsblatt zur Linearen Algebra II

Während des Blattes sei K ein Körper und V, W, V_1, V_2, W_1, W_2 K-Vektorräume.

Aufgabe 1. (1P+1P+2P)

a) Zeigen Sie, dass $V \otimes_K W$ isomorph zu $W \otimes_K V$ ist.

b) Gegeben seien die linearen Abbildungen

$$\phi : V_1 \to V_2 \quad , \quad \psi : W_1 \to W_2.$$

Zeigen Sie, dass eine eindeutige lineare Abbildung $\Omega_{\phi,\psi} \in \mathrm{Hom}(V_1 \otimes_K W_1, V_2 \otimes_K W_2)$ mit $\phi(v) \otimes_K \psi(w) = \Omega_{\phi,\psi}(v \otimes_K w)$ für alle $v \in V_1, w \in W_1$ existiert.

c) Seien A, B zwei K-Algebren. Zeigen Sie, dass auf $A \otimes_K B$ die Multiplikation

$$(a_1 \otimes_K b_1) \cdot (a_2 \otimes_K b_2) := (a_1 \cdot a_2) \otimes_K (b_1 \cdot b_2)$$

wohldefiniert und damit $A \otimes_K B$ eine K-Algebra ist.

Aufgabe 2. (2P+2P+2Bonuspunkte)

Gegeben seien die Vektorraumhomomorphismen

$$\phi : V_1 \to V_2 \quad , \quad \psi : W_1 \to W_2$$

und $\Omega_{\psi,\phi}$ wie in Aufgabe 1.

a) Zeigen Sie, ϕ und ψ sind genau dann surjektiv, wenn auch $\Omega_{\phi,\psi}$ surjektiv ist.

b) Zeigen Sie dass ϕ und ψ genau dann injektiv sind, wenn auch $\Omega_{\phi,\psi}$ injektiv ist.

c) Seien nun V_1, V_2, W_1 und W_2 endlichdimensional. Zeigen Sie, dass die lineare Fortsetzung der Abbildung

$$\Omega : \mathrm{Hom}(V_1, V_2) \otimes_K \mathrm{Hom}(W_1, W_2) \to \mathrm{Hom}(V_1 \otimes_K W_1, V_2 \otimes_K W_2) \quad , \quad \phi \otimes_K \psi \mapsto \Omega_{\phi,\psi}$$

mit $\Omega_{\phi,\psi}$ wie in Aufgabe 1 ein Isomorphismus ist.
(nochmal 2 Bonuspunkte, wenn Sie ein Beispiel für unendlichdimensionale Vektorräume finden in dem Ω nicht surjektiv ist.)

Hinweis: Aufgabe 2 in Blatt 10 von letztem Semester könnte helfen. Sie dürfen wieder auf dem Blatt Basisergänzung für unendlich dimensionale Vektorräume verwenden.

Das Übungsblatt kann bis spätestens Donnerstag den 06. 06. 2019 um 14 Uhr in Abgabekasten 47 im UG des Gebäudes E2.5 eingeworfen werden. Schreiben Sie Namen und Matrikelnummer aller Gruppenmitglieder sowie Ihre Übungsgruppe gut lesbar auf Ihre Abgabe. Sie dürfen alleine oder zu zweit ein Übungsblatt abgeben.

Aufgabe 3. (4P)

a) Gegeben sei der Vektorraumhomomorphismus

$$\Psi : \mathbb{R}^3 \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^3 \quad , \quad v \otimes_{\mathbb{R}} w \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} v \otimes_{\mathbb{R}} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 8 & 0 \\ 15 & 7 \end{pmatrix} w$$

Geben Sie für Basen B, C Ihrer Wahl die Darstellungsmatrix $D_{BC}(\Psi)$ in geeigneter Form an.

b) Seien $\phi \in \mathrm{End}(V)$ und $\psi \in \mathrm{End}(W)$ zwei Endomorphismen, deren charakteristische Polynome wie folgt in Linearfaktoren zerfallen:

$$CP_\phi(X) = \prod_{i=1}^{n} (\lambda_i - X) \quad , CP_\psi(X) = \prod_{i=1}^{m} (\nu_i - X)$$

Bestimmen Sie das charakteristische Polynom von $\phi \otimes_K \psi$.

Aufgabe 4. (4P)

Beweisen Sie folgende Isomorphien.

a) $K[X] \otimes_K K[X] \cong_{K-Algebra} K[X, Y]$ (= Polynome in zwei Variablen)

b) $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \cong_{\mathbb{Z}-Modul} \mathbb{Z}/\operatorname{ggT}(n, m)\mathbb{Z}$

Das Übungsblatt kann bis spätestens Donnerstag den 06. 06. 2019 um 14 Uhr in Abgabekasten 47 im UG des Gebäudes E2.5 eingeworfen werden. Schreiben Sie Namen und Matrikelnummer aller Gruppenmitglieder sowie Ihre Übungsgruppe gut lesbar auf Ihre Abgabe. Sie dürfen alleine oder zu zweit ein Übungsblatt abgeben.