Universität des Saarlandes
FR 6.1 Mathematik
Prof. Dr. G. Weitze-Schmithüsen
M.Sc. C. Steinhart

8. Übungsblatt zur Linearen Algebra II

Während des Blattes sei R ein kommutativer Ring und M ein R-Modul.

Aufgabe 1. (2P+1P+1P)

Sei M ein freier R-Modul mit Basis $\{b_1, \ldots, b_n\}$.

a) Zeigen Sie, dass jede Menge $\{c_1, \ldots, c_{n+1}\} \subseteq M$ linear abhängig ist.

b) Sei $\{c_1, \ldots, c_m\}$ eine weitere Basis von M. Zeigen Sie, dass dann bereits $m = n$ gilt. Wir nennen dann n den *Rang* von M ist.

c) Sei N ein weiterer freier R-Modul. Zeigen Sie, dass N und M genau dann isomorph sind, wenn ihre Basen gleichmächtig sind.

Aufgabe 2. (4P)

Analog wie in der Vorlesung kann man auch für nicht-kommutative Ringe $\mathcal{R}$ *freie (Links-)Moduln* definieren. Ein $\mathcal{R}$-Modul M heißt also *frei*, falls es ein linear unabhängiges Erzeugendensystem S von M gibt, d.h. für alle $n \in \mathbb{N}, r_1, \ldots, r_n \in \mathcal{R}, s_1, \ldots, s_n \in S$ gilt

$$\sum_{i=1}^{n} r_i s_i = 0 \quad \Longrightarrow \quad r_1 = \ldots = r_n = 0.$$

a) Ist K^n als Modul über den unteren Dreiecksmatrizen mit der üblichen Multiplikation ein freier Modul?

b) Seien V, W Vektorräume. Wir betrachten $\mathrm{Hom}(V, W)$ als $\mathrm{End}(W)$-Modul mit der Aktion:

$$\mathrm{End}(W) \times \mathrm{Hom}(V, W) \to \mathrm{Hom}(V, W) \quad , \quad (\phi, \psi) \mapsto \phi \circ \psi$$

Sei die Dimension von V endlich und ein Vielfaches der Dimension von W. Ist $\mathrm{Hom}(V, W)$ ein freier $\mathrm{End}(W)$-Modul?

Das Übungsblatt kann bis spätestens Donnerstag den 13. 06. 2019 um 14 Uhr in Abgabekasten 47 im UG des Gebäudes E2.5 eingeworfen werden. Schreiben Sie Namen und Matrikelnummer aller Gruppenmitglieder sowie Ihre Übungsgruppe gut lesbar auf Ihre Abgabe. Sie dürfen alleine oder zu zweit ein Übungsblatt abgeben.

Aufgabe 3. (4P)

Sei $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ die Standardbasis von $\mathbb{R}^4$.

a) Gegeben sei das Element

$$w := e_1 \wedge e_2 + 2e_2 \wedge e_3 + 3e_1 \wedge e_4 + 4e_2 \wedge e_4 - 6e_3 \wedge e_4 \in \bigwedge^2 \mathbb{R}^4$$

Zeigen Sie, dass w primitiv ist, d.h. es existieren $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^4$ mit $w = v_1 \wedge v_2$.

b) Zeigen Sie, dass

$$w := e_1 \odot e_2 + 2e_2 \odot e_3 + 3e_1 \odot e_4 + 4e_2 \odot e_4 - 6e_3 \odot e_4 \in S^2\mathbb{R}^4$$

nicht primitiv ist, d.h. w liegt nicht im Bild von $S : \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4 \to S^2(\mathbb{R}^4), (v_1, v_2) \mapsto v_1 \odot v_2$.

Aufgabe 4. (4P)

Sei K ein Körper, $n \in \mathbb{N}$ und $V = K^n$. Für eine Matrix $A \in K^{n\times n}$ und $k \in \mathbb{N}$ induziert A die lineare Abbildung

$$\bigwedge^k \phi_A : \bigwedge^k V \to \bigwedge^k V\ ,\ \sum_i v_1^{(i)} \wedge \cdots \wedge v_k^{(i)} \mapsto \sum_i Av_1^{(i)} \wedge \cdots \wedge Av_k^{(i)}.$$

a) Berechnen Sie für die Standardbasis $B := \{e_1 \wedge e_2, e_1 \wedge e_3, e_2 \wedge e_3\}$ von $\bigwedge^2(K^3)$ die Abbildungsmatrix von ϕ_A für $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

b) Zeigen Sie folgende Äquivalenz:

$$\text{Die Abbildung } \bigwedge^k \phi_A \text{ ist nicht die Nullabbildung} \iff k \leq \operatorname{Rang}(A).$$

Das Übungsblatt kann bis spätestens Donnerstag den 13. 06. 2019 um 14 Uhr in Abgabekasten 47 im UG des Gebäudes E2.5 eingeworfen werden. Schreiben Sie Namen und Matrikelnummer aller Gruppenmitglieder sowie Ihre Übungsgruppe gut lesbar auf Ihre Abgabe. Sie dürfen alleine oder zu zweit ein Übungsblatt abgeben.