Universität des Saarlandes
FR 6.1 Mathematik
Prof. Dr. G. Weitze-Schmithüsen
M.Sc. C. Steinhart

9. Übungsblatt zur Linearen Algebra II

Während des Blattes sei K ein Körper, $n \in \mathbb{N}$ und $\mathcal{R}$ ein kommutativer Ring.

Aufgabe 1. (4P)

a) Finden Sie eine Basis $B \subset \bigwedge^2 \mathbb{R}^3$, sodass für das Kreuzprodukt $\times$ folgende Gleichung gilt:

$$v \times w = D_B(v \wedge w)$$

b) Wir identifizieren $\mathbb{R} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{R}$ mit $\mathbb{R}$ via $\lambda \otimes \mu \mapsto \lambda \cdot \mu$. Schreiben Sie das Standardskalarprodukt von $\mathbb{R}^d$ als Summe $\sum_i \phi_i \odot \psi_i$ mit $\phi_i, \psi_i \in (\mathbb{R}^d)^*$.

Aufgabe 2. (4P)

Berechnen Sie die Determinante der folgenden reellen Matrix indem Sie nach den Spalten (1,3,5) entwickeln:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 4 & 1 & 6 & 2 \\ 2 & 7 & 2 & 5 & 5 & -2 \\ 0 & 7 & 1 & 5 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 3. (4P)

Sei $\phi \in \mathrm{End}_{\mathcal{R}-\mathrm{Modul}}(\mathcal{R}^n)$. Zeigen Sie, dass folgende Aussagen äquivalent sind:

a) ϕ ist invertierbar, d.h. es existiert ein $\tilde{\phi} \in \mathrm{End}_{\mathcal{R}-\mathrm{Modul}}(\mathcal{R}^n)$ mit $\tilde{\phi} \circ \phi = \phi \circ \tilde{\phi} = \mathrm{id}_{\mathcal{R}^n}$

b) Für jedes $k \in \mathbb{N}$ mit $k \leq n$ gilt $\wedge^k(\phi)$ ist invertierbar.

c) Es gilt $\det(\phi) \in \mathcal{R}^\times$, d.h. $\det(\phi)$ ist invertierbar in $\mathcal{R}$.

d) ϕ bildet Basen auf Basen ab, d.h. ist $v_1, \ldots, v_n$ eine Basis von $\mathcal{R}^n$, so ist auch $\phi(v_1), \ldots, \phi(v_n)$ eine Basis von $\mathcal{R}^n$.

Das Übungsblatt kann bis spätestens Mittwoch den 19. 06. 2019 um 14 Uhr in Abgabekasten 47 im UG des Gebäudes E2.5 eingeworfen werden. Schreiben Sie Namen und Matrikelnummer aller Gruppenmitglieder sowie Ihre Übungsgruppe gut lesbar auf Ihre Abgabe. Sie dürfen alleine oder zu zweit ein Übungsblatt abgeben.

Aufgabe 4. (2P+1P+1P+2Bonuspunkte)

Sei $V := K[X]$ der K-VR der Polynome über K. Wir betrachten den (nicht kommutativen) Ring

$$\mathcal{R} := \mathrm{End}_{K-VR}(V) = \{\varphi : V \to V \mid \varphi \text{ ist Vektorraum-Homomorphismus}\}$$

mit Verknüpfung als Multiplikation und $\mathcal{R}$ als $\mathcal{R}$-(Links-)Modul über sich selbst (s. Blatt 8 Aufgabe 2).

a) Zeigen Sie, dass $B := \{f_1, f_2\}$ mit

$$f_1 : V \to V \ , \ X^i \mapsto \begin{cases} X^{(i-1)/2} & , i \text{ ungerade} \\ 0 & , \text{sonst} \end{cases} \quad , \quad f_2 : V \to V \ , \ X^i \mapsto \begin{cases} X^{i/2} & , i \text{ gerade} \\ 0 & , \text{sonst} \end{cases}$$

eine Basis von $\mathcal{R}$ als $\mathcal{R}$-Modul sind.

b) Folgern Sie aus a), dass $\mathcal{R}^n \cong \mathcal{R}^m$ für beliebige $n, m \in \mathbb{N}$ gilt.

c) Geben Sie $h_1, h_2 \in \mathcal{R}$ an, sodass $id_V = h_1 \circ f_1 + h_2 \circ f_2$ gilt.

d) Für Matrizen über nichtkommutativen Ringen definieren wir die Multiplikation, d.h. für $p, q, r \in \mathbb{N}$ und $A = (a_{i,j})_{i \leq p, j \leq q} \in \mathcal{R}^{p \times q}$, $B = (b_{i,j})_{i \leq q, j \leq r} \in \mathcal{R}^{q \times r}$, definieren wir

$$A \cdot B := C = (c_{i,j})_{i \leq p, j \leq r} \in \mathcal{R}^{p \times r} \text{ mit } c_{i,j} = \sum_{k=1}^{q} b_{k,j} \circ a_{i,k}.$$

Für $n \in \mathbb{N}$ bezeichnet $I_n \in \mathcal{R}^{n \times n}$ die Einheitsmatrix, d.h. die Matrix mit $1_{\mathcal{R}}$ für jeden Eintrag auf der Diagonalen und die restlichen Einträge 0.
Gibt es für beliebige $n, m \in \mathbb{N}$ Matrizen $A \in \mathcal{R}^{n \times m}$ und $B \in \mathcal{R}^{m \times n}$, sodass $A \cdot B = I_n$ und $B \cdot A = I_m$ gilt? Alternativ dürfen Sie für ein (n, m) mit $n \neq m$ zwei entsprechende Matrizen explizit angeben.
Geht so etwas auch für Matrizen über Körpern oder kommutativen Ringen?

Das Übungsblatt kann bis spätestens Mittwoch den 19. 06. 2019 um 14 Uhr in Abgabekasten 47 im UG des Gebäudes E2.5 eingeworfen werden. Schreiben Sie Namen und Matrikelnummer aller Gruppenmitglieder sowie Ihre Übungsgruppe gut lesbar auf Ihre Abgabe. Sie dürfen alleine oder zu zweit ein Übungsblatt abgeben.