Universität des Saarlandes
FR 6.1 Mathematik
Prof. Dr. G. Weitze-Schmithüsen
M.Sc. C. Steinhart

# Extrablatt zur Linearen Algebra II

**Aufgabe 1. (4P)**

Berechne das charakteristische Polynom und das Minimalpolynome für folgende Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 7 & 8 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & -5 & -6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -5 & -9 & -12 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 6 & 9 \end{pmatrix}$$

Was ist die Jordan-Normalform von $A$?
Gib eine Matrix $S$ oder ihr Inverses an, sodass $SBS^{-1}$ Jordan-Normalform hat.

**Aufgabe 2. (4P)**

Sei $V := C^\infty(\mathbb{R})$ der $\mathbb{R}$-Vektorraum der unendlich oft differenzierbaren Funktionen von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$. Wir definieren die drei Abbildungen:

$$\delta : V \to \mathbb{R} \ , \ f \mapsto f(0)$$
$$\tau : V \to \mathbb{R} \ , \ f \mapsto \int_0^1 f(x)dx$$
$$\alpha : V \to \mathbb{R} \ , \ f \mapsto f'(0)$$

a) Zeige, dass $\delta, \tau, \alpha$ drei linear unabhängige Vektoren in $V^*$ definieren.

b) Sei $\frac{d}{dx} : V \to V, f \mapsto f'$ der Vektorraum-Homomorphismus, der eine Funktion auf seine Ableitung abbildet und $(\frac{d}{dx})^* : V^* \to V^*$ , $\alpha \mapsto \alpha \circ \frac{d}{dx}$ ihre duale Abbildung. Zeige, dass $(\frac{d}{dx})^*(\delta) = \alpha$ gilt.

**Aufgabe 3. (1,5P/1,5P/1P)**

Gegeben seien die beiden Polynome $f$ und $g$ über $\mathbb{R}$ mittels

$$f(X) = X^5 + 5X^3 + 3X^2 - 6X - 3 \ , \ g(X) = 2X^4 - 3X^3 + 12X^2 - 12X - 9$$

a) Finde ein Polynom $h \in \mathbb{R}[X]$ mit maximalem Grad, dass sowohl $f$ als auch $g$ teilt.

b) Berechne die entsprechenden $r_f, r_g \in \mathbb{R}[X]$ mit $f = hr_f$ und $g = hr_g$.

c) Was ändert sich, wenn wir statt $\mathbb{R}$ den Körper $\mathbb{F}_5$ wählen?

**Aufgabe 4. (4P)**

Sei $R$ ein kommutativer Ring und $M$ ein freier $R$-Modul mit Basis $\{b_1, \dots, b_n\}$. Zeige oder widerlege die folgenden Aussagen:

a) $M \cong R^n$

b) Wird $M$ von $\{c_1, \dots, c_{n+1}\}$ erzeugt, dann wird $M$ auch von einer echten Teilmenge $S \subsetneq \{c_1, \dots, c_{n+1}\}$ erzeugt.

c) Jeder Untermodul $U \neq \{0\}$ von $M$ ist ein freier $R$-Modul.

d) Ist $S \leq R$ ein Teilring, dann ist $M$ auch ein freier $S$-Modul.

**Aufgabe 5. (4P)**

a) Sei $\mathbb{K}$ ein Körper,$V$ und $W$ zwei $n$ bzw. $m$ dimensionale $\mathbb{K}$-Vektorräume. Zeige für jede Bilinearform

$$\alpha V \times W \to \mathbb{K}$$

eine eindeutige Matrix $A \in \mathbb{K}^{n\times m}$ mit

$$\alpha(v, w) \mapsto v^t A w$$

existiert.

b) Bestimme alle $\mathbb{Z}$-bilinearen Homomorphismen

$$\beta : \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$$

von $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ nach $\mathbb{Z}$.

**Aufgabe 6. (4P)**

Sei $\phi \in \mathrm{End}(K^n)$ und $\phi^*$ ihre Adjungierte. Zeige folgende Aussagen:

a) $\phi, \phi\phi^*$ und $\phi^*$ haben den selben Rang.

b) $\phi\phi^*$ ist selbstadjungiert.

c) $\mathrm{Kern}(\phi^*) = \mathrm{Bild}(\phi)^\perp$.

**Aufgabe 7. (4P)**

Sei $\mathbb{K}$ ein Körper,$V$ und $W$ zwei endlich-dimensionale $\mathbb{K}$-Vektorräume und $\phi \in \mathrm{End}(V)$ und $\psi \in$

$\mathrm{End}(W)$ zwei Endomorphismen, deren charakteristisches Polynom in Linearfaktoren zerfällt, d.h. es gilt:

$$\chi_\phi(X) = \prod_{i=0}^{n}(X-\lambda_i) \quad , \quad \chi_\psi(X) = \prod_{i=0}^{m}(X-\mu_i)$$

Bestimme das charakteristische Polynom von $\phi \otimes \psi : V \otimes W \to V \otimes W$ , $\sum_i v_i \otimes w_i \mapsto \sum_i \phi(v_i) \otimes \psi(w_i)$.

**Aufgabe 8. (1P + 3P)**

Sei $V = \mathbb{R}^4$, $B := \{e_1, \ldots, e_4\}$ die Standardbasis und $\omega := e_1 \wedge e_2 - e_1 \wedge e_4 + e_2 \wedge e_3 + e_3 \wedge e_4 \in \Lambda^2(V)$.

a) Zeige, dass $\omega$ zerlegbar ist, d.h. es existieren $v, w \in V$ mit $\omega = v \wedge w$.

b) Zeige, dass die Abbildung $\phi_\omega : V \to \Lambda^3(V), v \mapsto v \wedge \omega$ linear ist und schreibe für die Basis $E := \{e_1 \wedge e_2 \wedge e_3, e_1 \wedge e_2 \wedge e_4, e_1 \wedge e_3 \wedge e_4, e_2 \wedge e_3 \wedge e_4\}$ von $\Lambda^3(V)$ (s. Vorlesung) die Darstellungsmatrix $D_{EB}(\phi_\omega)$ auf.

**Aufgabe 9. (2P+2P+2Bonuspunkte)**

Sei $\mathbb{K}$ ein Körper und $V$ ein $\mathbb{K}$-Vektorraum.

a) Sei $\phi \in \mathrm{End}(V)$ und $V$ besitze eine Basis aus Eigenvektoren von $\phi$. Zeige, dass für jedes $k \in \mathbb{N}$ auch $\bigwedge^k(V)$ eine Basis aus Eigenvektoren von $\wedge^k \phi$ besitzt.

b) Sei nun zusätzlich $B := \{v_1, \ldots, v_n\}$ eine Basis von $V$. Zeige oder widerlege folgende Aussagen:

   (i) Ist $\{v_{i_1} \wedge \cdots \wedge v_{i_k} \mid 1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_k <\leq n\}$ eine Basis aus Eigenvektoren von $\bigwedge^k V$ bezüglich $\wedge^k \phi$, dann ist $B$ eine Basis aus Eigenvektoren von $V$ bezüglich $\phi$.

   (ii) Ist $\{v_{i_1} \otimes \cdots \otimes v_{i_k} \mid i_1, \ldots, i_k \in \{1, \ldots, n\}\}$ eine Basis aus Eigenvektoren von $\bigotimes^k V$ bezüglich $\otimes^k \phi$, dann ist $B$ eine Basis aus Eigenvektoren von $V$ bezüglich $\phi$.

**Aufgabe 10. (4P)**

Sei $\mathcal{C}$ die Kategorie mit nichtleeren Teilmengen von $\mathbb{R}$ als Objekte und auf $\mathbb{R}$ stetigen Abbildungen (eingeschränkt auf die Teilmengen) und $\mathcal{G}\nabla$ die Kategorie der Gruppen mit Gruppenhomomorphismen als Morphismen.
Zeige oder widerlege folgende Aussagen (wie immer mit Begründung):

a) In $\mathcal{C}$ sind die Isomorphismen gerade die stetigen Funktionen, die eine Teilmenge bijektiv auf die andere Teilmenge abbilden.

b) Die folgenden Vorschriften definieren einen Funktor $\mathcal{F} : \mathcal{C} \to Gr$:

   - Für $A \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C})$ sei $\mathcal{F}(A) := (\mathrm{Mor}(\mathbb{R}, A), +)$ die Menge der stetigen Abbildungen von $\mathbb{R}$ nach $A$ mit Addition als Verknüpfung.
   - Für $A, B \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C})$ und $\phi \in Mor(A, B)$ sei $\mathcal{F}(\phi)$ die Abbildung

$$\mathcal{F}(\phi) : \mathrm{Mor}(\mathbb{R}, A) \to \mathrm{Mor}(\mathbb{R}, B) \ , \ f \mapsto \phi \circ f.$$