

Algebra

Übungsblatt 0

Aufgabe 1 (Keine Punkte)

Finden Sie jeweils mindestens ein nichttriviales Beispiel für

- eine Kategorie \mathcal{C} ,
- einen Funktor $F: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ und
- eine natürliche Transformation $\alpha: F \rightarrow G$,

welches in der Vorlesung noch nicht aufgetaucht ist. Beschreiben Sie ihr Beispiel möglichst genau.

Aufgabe 2 (Keine Punkte)

Ein Morphismus $f: C \rightarrow D$ in einer Kategorie \mathcal{C} ist ein *Isomorphismus*, wenn es einen Morphismus $f^{-1}: D \rightarrow C$ in \mathcal{C} gibt, so dass $f \circ f^{-1} = 1_D$ und $f^{-1} \circ f = 1_C$. Beschreiben Sie die Isomorphismen in den folgenden Kategorien \mathcal{C} möglichst genau:

- Die Kategorie $\mathcal{C} = \text{Set}$ der Mengen.
- Eine Gruppe G aufgefasst als eine Kategorie $\mathcal{C} = \mathcal{G}$ mit einem Objekt $*$ und $\mathcal{G}(*, *) = G$.
- Eine partiell geordnete Menge (P, \leq) aufgefasst als Kategorie $\mathcal{C} = \mathcal{P}$.
- Die Kategorie $\mathcal{C} = \text{Fun}(\mathcal{I}, \mathcal{D})$ von Funktoren von einer kleinen Kategorie \mathcal{I} in eine Kategorie \mathcal{D} mit natürlichen Transformationen als Morphismen.

Aufgabe 3 (Keine Punkte)

Es sei G eine Gruppe und \mathcal{G} die zugehörige Kategorie wie in Aufgabe 2(b).

- Machen Sie sich klar, dass \mathcal{G} wirklich eine Kategorie ist. Geben Sie dazu auch explizit die Identität id_* an.
- Zeigen Sie, dass ein Funktor $X: \mathcal{G}^{\text{op}} \rightarrow \text{Set}$ nichts anderes als eine Menge $X(*)$ zusammen mit einer Operation von G auf $X(*)$ ist. Operiert G von links oder von rechts auf $X(*)$? Was ist eine natürliche Transformation $f: X \rightarrow Y$ zwischen zwei solchen Funktoren?
- Diskutieren Sie das Yoneda-Lemma

$$\text{Nat}(\mathcal{G}(-, *), X) \cong X(*)$$

in diesem Fall möglichst genau. Was bedeuten die Natürlichkeiten in X und $*$?

- Betrachten Sie nun den Fall $X = \mathcal{G}(-, *)$ und schlussfolgern Sie, dass G isomorph zu einer Untergruppe der symmetrischen Gruppe $\{f: G \rightarrow G \text{ bijektive Abbildung von Mengen}\}$ ist.

Abgabe bis spätestens Montag, den 21. 10. 2019, um 14:00 Uhr. Werfen Sie Ihre Lösungsvorschläge in die dafür vorgesehenen Einwurfschächte vor dem Zeichensaal in Gebäude E2 5. Abgabe zu dritt ist möglich. Bitte geben Sie Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer an!