UNIVERSITÄT DES SAARLANDES

Fachrichtung Mathematik
Prof. Dr. Gabriela Weitze-Schmithüsen
Dr. Tobias Columbus
Christian Steinhart

Algebra

Übungsblatt 1

Aufgabe 1 (4 Punkte)
Seien $\mathcal{C}$ und $\mathcal{D}$ zwei Kategorien und $F\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ ein Funktor.

a) Zeige dass F Isomorphismen auf Isomorphismen abbildet.

b) Sei nun F ein volltreuer Funktor und $F(\phi)$ ein Isomorphismus in $\mathcal{D}$. Zeige, dass dann auch ϕ ein Isomorphismus ist.

c) Zeige, dass die Aussage aus Teil b) im Allgemeinen nicht stimmt.

d) Sei nun $\mathcal{C}$ eine kleine Kategorie und $\mathrm{Fun}(\mathcal{C}, \mathcal{D})$ die Kategorie, deren Objekte Funktoren von $\mathcal{C}$ nach $\mathcal{D}$ sind und deren Morphismen natürliche Transformationen sind. Zeige, dass eine natürliche Transformation genau dann ein Isomorphismus in $\mathrm{Fun}(\mathcal{C}, \mathcal{D})$ ist, wenn jede Komponente ein Isomorphismus in $\mathcal{D}$ ist.

Aufgabe 2 (4 Punkte)
Sei G eine Gruppe und $\mathcal{G}$ die Kategorie mit einem Objekt $\star$ und $\mathcal{G}(\star, \star) = G$.

a) Sei weiterhin $\mathcal{C}$ die Kategorie der Mengen mit G-Operation, d.h.

- Objekte sind Mengen X zusammen mit einer Gruppenoperation von G,
- Morphismen sind G-equivariante Abbildungen, d.h.

$$\mathcal{C}((X, \bullet), (Y, \star)) = \{\phi \in \mathrm{Abb}(X, Y) \mid \phi(g \bullet x) = g \star \phi(x) \ \forall x \in X, g \in G\}.$$

Zeige, dass die Kategorie $\mathrm{Fun}(\mathcal{G}, \mathrm{Set})$ isomorph zu $\mathcal{C}$ ist.

b) Sei $F\colon \mathcal{G} \to \mathrm{Set}$ ein Funktor. Was ist der Kolimes von F?

Aufgabe 3 (4 Punkte)
Sei $\mathcal{C}$ eine kleine Kategorie und $y\colon \mathcal{C} \to Fun(C^{op}, \mathrm{Set}), c \mapsto \mathcal{C}(\cdot, c)$ die Yoneda-Einbettung.

a) Zeige, dass y alle Produkte und Equalizer von $\mathcal{C}$ erhält.

b) Gilt das auch für Koprodukte und Koequalizer?

Aufgabe 4 (4 Punkte)

a) Was sind Produkte und Koprodukte in der Kategorie einer partiell geordneten Menge.?

b) Seien V, W zwei Vektorräume und $f : V \to W$ eine lineare Abbildung. Was sind Equalizer und Koequalizer von f und der Nullabbildung (in der Kategorie der Vektorräume)?

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "0"'] & W \end{tikzcd}$$

Aufgabe 5 (4 Bonus-Punkte)
Sei $\mathcal{C}$ eine Kategorie und $f \in \mathcal{C}(C, D)$.

a) Zeige, dass f genau dann ein Monomorphismus ist, wenn das Diagramm

$$\begin{tikzcd} & C \arrow[dl, "\mathrm{id}_C"'] \arrow[d, "f"] \arrow[dr, "\mathrm{id}_C"] & \\ C \arrow[r, "f"'] & D & C \arrow[l, "f"] \end{tikzcd}$$

der Limes von $C \xrightarrow{f} D \xleftarrow{f} C$ ist.

b) Gib die entsprechende Aussage für Epimorphismen an und zeige, dass ein Funktor der Kolimiten erhält, auch Epimorphismen erhält.

Abgabe bis spätestens Montag, den 28.10, um 14:00 Uhr. Werfen Sie Ihre Lösungsvorschläge in die dafür vorgesehenen Einwurfkästen vor dem Zeichensaal in Gebäude E 2 5. Abgabe zu dritt ist möglich. Bitte geben Sie Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer an!