UNIVERSITÄT DES SAARLANDES

Fachrichtung Mathematik
Prof. Dr. Gabriela Weitze-Schmithüsen
Dr. Tobias Columbus
Christian Steinhart

Algebra

Übungsblatt 2

Aufgabe 1 (4 Punkte)

a) Sei X eine Menge und für $\overline{X} := \{\overline{x} \mid x \in X\}$ sei $S := X \sqcup \overline{X}$ die disjunkte Vereinigung. Sei $W := \{(s_1, \ldots, s_k) \mid k \in \mathbb{N}_0, s_1, \ldots, s_k \in S\}$ die Menge aller Wörter in S. Auf W sei „$\sim$“ die von den Relationen

$$\begin{aligned} \forall x \in X &: (s_1, \ldots, s_k) \sim (s_1, \ldots, s_i, x, \overline{x}, s_{i+1}, \ldots, s_k) \\ \text{und } \forall x \in X &: (s_1, \ldots, s_k) \sim (s_1, \ldots, s_i, \overline{x}, x, s_{i+1}, \ldots, s_k) \end{aligned}$$

erzeugte Äquivalenzrelation, d.h. zwei Wörter sind äquivalent, wenn sie mit endlich vielen Einfügungen oder Entfernungen von Unterwörtern der Form $(x, \overline{x})$ oder $(\overline{x}, x)$ ineinander überführt werden können.

Auf W sei $\star$ die Konkatenation von Wörtern, d.h.

$$\star : W \times W \to W \quad , \quad (s_1, \ldots, s_k) \star (t_1, \ldots, t_m) := (s_1, \ldots, s_k, t_1, \ldots, t_m).$$

Zeige, dass $\star$ Äquivalenzklassen respektiert, d.h. dass $\star$ auch auf $W/\sim$ wohldefiniert ist. Zeige weiterhin, dass $F(X) := (W/\sim, \star)$ eine Gruppe ist. Sie wird auch die *frei von X erzeugte Gruppe* genannt. Was ist ihr neutrales Element und das Inverse eines Wortes $[(s_1, \ldots, s_k)]$?

b) Sei G eine Gruppe und $\phi : X \to G$ eine Abbildung von Mengen und

$$\eta_X : X \to F(X) \quad , \quad x \mapsto [(x)]$$

die Einbettung von X in $F(X)$. Zeige, dass dann ein eindeutiger Gruppenhomomorphismus $\overline{\phi} : F(X) \to G$ mit $\overline{\phi} \circ \eta_X = \phi$ existiert.

c) Sei $V : \mathrm{Grp} \to \mathrm{Set}$ der Vergissfunktor von der Kategorie der Gruppen nach Set, d.h. er bildet eine Gruppe $(G, \star)$ auf G ab und Morphismen auf sich selbst. Sei weiterhin $F : \mathrm{Set} \to \mathrm{Grp}$ der Funktor, der eine Menge X auf die von ihr frei erzeugte Gruppe $F(X)$ abbildet und eine Abbildung $\phi : X \to Y$ auf $\overline{\eta_Y \circ \phi} : F(X) \to F(Y)$ wie in Teil b) abbildet. Zeige, dass F linksadjungiert zu V ist.

Aufgabe 2 (4 Punkte + 2 Bonus - Punkte)
Seien $\mathcal{C}$ und $\mathcal{D}$ zwei Kategorien und $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$, $U : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ zwei Funktoren.

a) Zeige, dass F genau dann linksadjungiert zu U ist, wenn zwei natürliche Transformationen $\eta : 1 \to UF, \varepsilon : FU \to 1$ existieren, so dass die folgenden Diagramme von natürlichen Transformationen kommutieren:

$$\begin{tikzcd} F \arrow[r, "F_\eta"] \arrow[dr, equal] & FUF \arrow[d, "\varepsilon_F"] \\ & F \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} U \arrow[r, "\eta_U"] \arrow[dr, equal] & UFU \arrow[d, "U_\varepsilon"] \\ & U \end{tikzcd}$$

Hierbei bezeichnet F_η die natürliche Transformation $\{F(\eta_X)\}_{X\in\mathcal{C}}$ und η_F die natürliche Transformation $\{\eta_{F(X)}\}_{X\in\mathcal{C}}$.

b) Bestimme die Morphismen η und ε für die Adjunktion $F \dashv V$ aus Aufgabe 1c).

c) Sei nun F zu U linksadjungiert und η wie in Teil a). Zeige, dass η genau dann eine natürlicher Isomorphismus ist, wenn F volltreu ist.

Aufgabe 3 (4 Punkte)

a) Sei $\Delta_\varnothing$: Set $\to$ Set der Funktor, der alles auf die leere Menge abbildet. Hat $\Delta_\varnothing$ einen Linksadjungierten bzw. einen Rechtsadjungierten? Gib die Adjunktion gegebenenfalls an.

b) Für eine Menge A sei $P(A)$ die durch „$\subseteq$“ geordnete Potenzmenge und $\mathcal{PA}$ die zugehörige Kategorie, d.h. Objekte von $\mathcal{PA}$ sind Teilmengen von A und zwischen $X, Y \in \mathcal{PA}$ existiert genau dann ein Morphismus, wenn $X \subseteq Y$ gilt. Seien nun A, B zwei Mengen und $f : A \to B$ eine Abbildung. Dann erhalten wir die beiden Funktoren:

$$\begin{aligned} f^* : \mathcal{PB} \to \mathcal{PA} \quad &, \quad f^*(X) := f^{-1}(X) \\ f_* : \mathcal{PA} \to \mathcal{PB} \quad &, \quad f_*(X) := f(X) \end{aligned}$$

Zeige, dass f_* linksadjungiert zu f^* ist und folgere hieraus die Gleichungen

$$\begin{aligned} f_*(X \cup Y) &= f_*(X) \cup f_*(Y) \\ \text{und } f^*(X \cap Y) &= f^*(X) \cap f^*(Y). \end{aligned}$$

Aufgabe 4 (4 Punkte)
Sei K ein Körper und Alg_K die Kategorie der kommutativen K-Algebren sowie Vek_K die Kategorie der K-Vektorräume. Sei weiterhin $V : \mathrm{Alg}_K \to \mathrm{Vek}_K$ der Vergissfunktor der eine K-Algebra $(A, +, \cdot)$ auf den zugehörigen Vektorraum $(A, +)$ abbildet und $S : \mathrm{Vek}_K \to \mathrm{Alg}_K$ der Funktor der einen Vektorraum V auf seine symmetrische Algebra $S(V) := \oplus_{i\in\mathbb{N}_0} S^i(V)$ abbildet.

a) Zeige, dass S linksadjungiert zu V ist.

b) Folgere hieraus für $V, W \in \mathrm{Vek}_K$, dass $S(V \oplus W) \cong S(V) \otimes_K S(W)$ gilt.
Hinweis: Was sind die Koprodukte in den jeweiligen Kategorien?

Abgabe bis spätestens Montag, den , um 14:00 Uhr. Werfen Sie Ihre Lösungsvorschläge in die dafür vorgesehenen Einwurfkästen vor dem Zeichensaal in Gebäude E 2 5. Abgabe zu dritt ist möglich. Bitte geben Sie Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer an!