UNIVERSITÄT DES SAARLANDES

Fachrichtung Mathematik
Prof. Dr. Gabriela Weitze-Schmithüsen
Dr. Tobias Columbus
Christian Steinhart

Algebra

Übungsblatt 3

Aufgabe 1 (3 Punkte)
Sei G eine Gruppe mit 105 Elementen. Zeige, dass G einen nicht-trivialen Normalteiler besitzt.

Aufgabe 2 (4 Punkte)

a) Gib für $p = 3, 5, 7$ jeweils eine p-Sylow-Gruppe von S_6 an.

b) Zeige, dass für $k \in \mathbb{N}_0$ alle Untergruppen von S_6 mit 3^k Elementen abelsch sind.

Aufgabe 3 (2 + 1 Bonus - Punkte)
Seien G eine Gruppe und $N, K \trianglelefteq G$ zwei Normalteiler von G. Beweise die folgenden Aussagen:

a) $NK := \{nk \mid n \in N, k \in K\}$ und $N \cap K$ sind Normalteiler von G.

b) $G/(NK) \cong (G/N)/(K/N)$.

c) Ist K nur eine Untergruppe von G, dann sind die Nebenklassen aus b) bijektiv zueinander.

Aufgabe 4 (4 Punkte)
Seien G und H Gruppen und $\phi : G \to H$ ein Gruppenhomomorphismus. Zeige oder widerlege folgende Aussagen:

a) Ist ϕ injektiv, dann werden p-Sylow-Gruppen von ϕ auf p-Sylow-Gruppen abgebildet.

b) Ist ϕ surjektiv, dann sind Urbilder von p-Sylow-Gruppen wieder p-Sylow-Gruppen.

Aufgabe 5 (3 Punkte)
Seien $n \in \mathbb{N}$ und $D \subset \mathrm{GL}_n(\mathbb{Z})$ die Gruppe der oberen Dreiecksmatrizen mit Einsen auf der Diagonalen. Für eine Primzahl $p \in \mathbb{N}$ sei weiterhin der Gruppenhomomorphismus

$$\pi : D \to \mathrm{SL}_n(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) \quad , \quad (a_{i,j})_{i,j} \mapsto (\overline{a_{i,j}})_{i,j}$$

gegeben. Bestimme den Index des Kerns von π in D in Abhängigkeit von p und n.

Abgabe bis spätestens Montag, den 11.11.2019, vor der Übung. Werfen Sie Ihre Lösungsvorschläge in die dafür vorgesehenen Einwurfkästen vor dem Zeichensaal in Gebäude E 2 5. Abgabe zu dritt ist möglich. Bitte geben Sie Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer an!