UNIVERSITÄT DES SAARLANDES

Fachrichtung Mathematik
Prof. Dr. Gabriela Weitze-Schmithüsen
Dr. Tobias Columbus
Christian Steinhart

Algebra

Übungsblatt 4

Aufgabe 1 (8+2 Bonus - Punkte)
Sei G eine Gruppe. Für $a, b \in G$ ist der Kommutator $[a, b] := aba^{-1}b^{-1}$ und die Kommutatorgruppe $[G, G]$ von G ist die von allen Kommutatoren $\{[a, b] \mid a, b \in G\}$ erzeugte Untergruppe.

a) Zeige, dass $[G, G]$ eine charakteristische Untergruppe von G ist, d.h. für jeden Automorphismus $\phi : G \to G$ ist $\phi([G, G]) \subseteq [G, G]$. Insbesondere ist damit $[G, G]$ ein Normalteiler.

b) Zeige, dass $G^{ab} := G/[G, G]$ abelsch ist und jeder Gruppenhomomorphismus $\phi : G \to A$ in eine abelsche Gruppe A eindeutig über G^{ab} faktorisiert, d.h. für die Projektion $\pi : G \to G^{ab}$ existiert ein eindeutiges $\hat{\phi} : G^{ab} \to A$ mit $\phi = \hat{\phi} \circ \pi$.

c) Folgere aus b) dass $F : \mathrm{Grp} \to \mathrm{Grp}^{\mathrm{ab}}, G \mapsto G^{ab}, \phi \mapsto \hat{\phi}$ die Linksadjungierte zum Einbettungsfunktor $I : \mathrm{Grp}^{\mathrm{ab}} \to \mathrm{Grp}$ von der Kategorie der abelschen Gruppen in die Kategorie der Gruppen ist.

d) Sei $G^0 := G$ und induktiv die i-te Kommutatorgruppe definiert als $G^i := [G^{i-1}, G^{i-1}]$. Zeige dass G genau dann auflösbar ist, wenn $G^i = \{e_G\}$ für ein $i \in \mathbb{N}$ gilt.

e) Eine Gruppe G heißt perfekt, wenn sie bereits ihre Kommutatorgruppe $[G, G] = G$ ist. Zeige, dass eine endliche Gruppe genau dann auflösbar ist, wenn ihre einzige perfekte Untergruppe $\{e_G\}$ ist.

Aufgabe 2 (2 Bonus - Punkte)
Die Eule Ferdinand hat folgendes Problem: Er hängt sehr gerne seine Bilder daheim mit zwei Nägeln und einem Faden auf. Wenn aber seine Verwandtschaft zu Besuch kommt, klaut ihm immer jemand einen der beiden Nägel aus der Wand - er hat schon immer vermutet, dass seine Cousins dritten Grades eine Elster als Vorfahre haben. Da dieser Nageldiebstahl ihm aber langsam auf die Nerven und an den Nagelvorrat geht, überlegt er sich folgendes:

Er hängt seine Bilder so mit den zwei Nägeln und dem Faden auf, dass das Bild herunterfällt, sobald man irgendeinen der beiden Nägel zieht (die Länge des Fadens ist egal und der Faden hat auch keine Reibung o.ä.). Wie schafft er das? Schafft er das auch mit beliebig vielen Nägeln, um seinen Besuch noch mehr zum verderblichen Nagelziehen zu verlocken?
Hinweis: Sei $\phi : G \to H$ ein Gruppenhomomorphismus mit $\phi(g_1) = e_H$. Was ist $\phi([g_1, g_2])$?

Aufgabe 3 (4 Punkte)
Sei $n \geq 5$ und A_n die alternierende Gruppe über n Buchstaben, d.h. A_n ist der Kern der Signum-Abbildung $\operatorname{sgn} : S_n \to \{\pm 1\}$. Wir wollen zeigen, dass A_n einfach ist. Zeige hierzu:

a) A_n wird von 3-Zykeln erzeugt.

b) In A_n sind je zwei 3-Zykel zueinander konjugiert.

Sei nun $N \trianglelefteq A_n$ ein Normalteiler. Zeige weiterhin:

c) Enthält N einen 3-Zykel oder das Produkt zweier disjunkter Transpositionen, so ist $N = A_n$.

d) Zeige, dass N eine Permutation $\sigma \neq \mathrm{id}$ enthält, so dass $|\{i \mid \sigma(i) \neq i\}| \leq 4$ gilt. Folgere hieraus, dass A_n einfach ist.

Aufgabe 4 (4 Punkte)
Sei G die Isometriegruppe eines sechsseitigen Würfels, also alle abstandserhaltenden Abbildungen eines Würfels auf sich selbst. Bestimme eine Kompositionsreihe von G.
Hinweis: Man kann die Mächtigkeit von G wie in Aufgabe 3c) von Blatt 12 von LA2 berechnen und erhält 48 Elemente.

Abgabe bis spätestens Montag, den 18.11.19, um 12:30 Uhr. Werfen Sie Ihre Lösungsvorschläge in die dafür vorgesehenen Einwurfkästen vor dem Zeichensaal in Gebäude E 2 5. Abgabe zu dritt ist möglich. Bitte geben Sie Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer an!