UNIVERSITÄT DES SAARLANDES

Fachrichtung Mathematik
Prof. Dr. Gabriela Weitze-Schmithüsen
Dr. Tobias Columbus
Christian Steinhart

Algebra

Übungsblatt 5

Aufgabe 1 (3 Punkte)
Seien H, N zwei Gruppen und durch $\phi : H \to \mathrm{Aut}(N)$ eine Gruppenaktion von H auf N definiert. Dann ist das semidirekte Produkt $G := N \rtimes_\phi H$ die Menge $N \times H$ mit der Verknüpfung $(n, h) \bullet (n', h') := (n\phi(h)(n'), hh')$ [1].

a) Zeige, dass G eine Gruppe ist und bestimme das Neutralelement und das Inverse von (n, h).

b) Zeige, dass E genau dann ein semidirektes Produkt $N \rtimes_\phi H$ ist, wenn es eine spaltende kurze exakte Sequenze $1 \to N \to E \to H \to 1$ gibt.

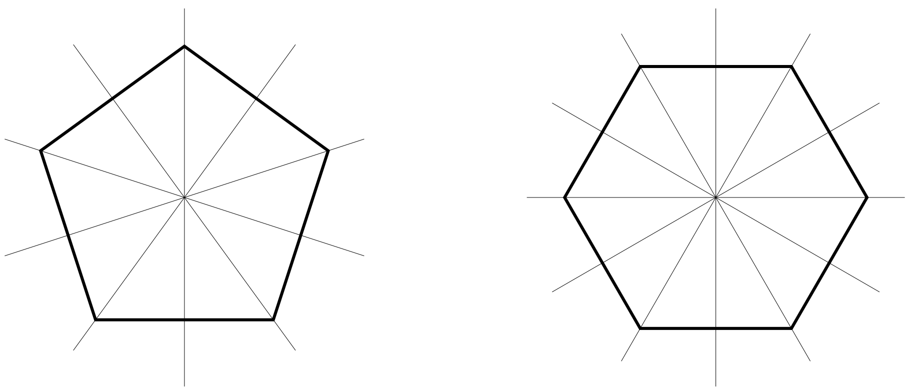
c) Sei nun G eine Gruppe, $N \trianglelefteq G$ ein Normalteiler und $H \leq G$ eine Untergruppe. Zeige, dass dann NH isomorph zu einem semidirekten Produkt von N und H ist.

Aufgabe 2 (3 Punkte)
Für $n \geq 3$ ist die Diedergruppe D_n die Isometriegruppe eines regelmäßigen n-Ecks. Weiterhin bezeichne $s \in D_n$ die Spiegelung an einer (fest gewählten) Symmetrieachse und $d \in D_n$ die Drehung des n-Ecks um den Winkel $\frac{2\pi}{n}$.

a) Zeige, dass sich jedes Element in D_n entweder als sd^k oder d^k für ein $k \in \mathbb{Z}$ schreiben lässt.

b) Folgere daraus, dass die Diedergruppe eine spaltende Gruppenerweiterung von C_2 durch C_n ist und schreibe sie als entsprechendes semidirektes Produkt.

c) Bestimme das Zentrum von D_n.



Regelmäßiges 5- und 6-Eck mit Symmetrieachsen

[1] Vergleiche diese Konstruktion mit Bemerkung 2.4.2 aus der Vorlesung.

Aufgabe 3 (4 Punkte)
Es sei

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\alpha"'] & B \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\beta"'] & C \arrow[r, "h"] \arrow[d, "\gamma"'] & D \arrow[r, "i"] \arrow[d, "\delta"'] & E \arrow[d, "\varepsilon"'] \\ A' \arrow[r, "f'"'] & B' \arrow[r, "g'"'] & C' \arrow[r, "h'"'] & D' \arrow[r, "i'"'] & E' \end{tikzcd}$$

ein kommutatives Diagramm von Gruppen mit exakten Zeilen. Zeige die folgenden Aussagen:

a) Sind β und δ injektiv und ist α surjektiv, so ist auch γ injektiv.

b) Sind β und δ surjektiv und ist ε injektiv, so ist auch γ surjektiv.

c) Sind β und δ Isomorphismen und sind α surjektiv und ε injektiv, so ist auch γ ein Isomorphismus.

Aufgabe 4 (4 Punkte)
Es sei $f\colon G \to H$ ein Gruppenhomomorphismus und

$$1 \longrightarrow A \longrightarrow E \xrightarrow{\pi} H \longrightarrow 1$$

eine Erweiterung der Gruppe H durch eine abelsche Gruppe A.

a) Zeige, dass $E' = \{(e,g) \mid e \in E, g \in G \text{ mit } \pi(e) = f(g)\}$ mit der komponentenweisen Verknüpfung eine Gruppe[2] ist und dass die kanonische Projektion $\pi'\colon E' \to G$ auf die zweite Komponente ein surjektiver Gruppenhomomorphismus ist.

b) Zeige, dass $\ker \pi' \cong A$ und drücke die von π' induzierte Operation von G auf A mit Hilfe der Operation von H auf A aus.

c) Beschreibe die Kohomologieklasse der Erweiterung

$$1 \longrightarrow A \longrightarrow E' \xrightarrow{\pi'} G \longrightarrow 1$$

mit Hilfe der Kohomologieklasse der gegebenen Erweiterung E von H durch A.

Hinweis: In den Teilen b) und c) kann es hilfreich sein den von einem Schnitt s von π induzierten Schnitt[3] t von π' mit $t(g) = (sf(g), g)$ zu betrachten.

[2] Eigentlich ist E' ein Limes in der Kategorie der Gruppen. Gib das entsprechende Diagramm und die universelle Eigenschaft von E' an!

[3] Dieser Schnitt t lässt sich auch mit der universellen Eigenschaft von E' und der Tatsache, dass der Vergißfunktor von Gruppen nach Mengen Limiten erhält, konstruieren.

Aufgabe 5 (2 Wochen Bearbeitungszeit, 8 Punkte)
In dieser Aufgabe[4] wollen wir den Satz von Schur und Zassenhaus beweisen. Dieser Satz besagt, dass für zwei endliche Gruppen G und H mit teilerfremden Ordnungen $m = |G|$ und $n = |H|$ jede kurze exakte Sequenz

$$1 \longrightarrow H \longrightarrow E \xrightarrow{\pi} G \longrightarrow 1 \tag{E}$$

spaltet, d. h. dass für jede solche kurze exakte Sequenz ein Gruppenhomomorphismus $\sigma\colon G \to E$ mit $\pi\sigma = \mathrm{id}_G$ existiert.

a) Mach Dir noch einmal klar, dass diese Aussage in der Vorlesung für kurze exakte Sequenzen, in denen die Gruppe H abelsch ist, bereits bewiesen wurde.

b) Sei nun p ein Primteiler von n. Zeige, dass jede p-Sylowgruppe S von E bereits eine Untergruppe von H ist. Folgere hieraus, dass m ein Teiler der Ordnung des Normalisators $N_E(S) = \{e \in E \mid eSe^{-1} = S\}$ von S in E ist.

c) Zeige, dass das Zentrum einer Gruppe charakteristisch[5] ist. Sei nun Z das Zentrum einer p-Sylowgruppe von E für einen Primteiler p von n und $N = N_E(Z) = \{e \in E \mid eZe^{-1} = Z\}$ der Normalistor von Z. Zeige, dass $N_E(S) \subseteq N$ gilt und damit m auch ein Teiler der Ordnung von N ist.

In den verbleibenden Teilaufgaben wollen wir nun den Satz von Schur und Zassenhaus durch Induktion nach $mn = |E|$ beweisen. Dazu sei $N \subseteq E$ wie in Teil (c) stets der Normalisator in E des Zentrums Z einer p-Sylowgruppe in E.

(d) Zeige, dass die Sequenz

$$1 \longrightarrow H \cap N \xrightarrow{j|_{H\cap N}} N \xrightarrow{\pi|_N} G \longrightarrow 1$$

exakt ist und schlußfolgere mit der Induktionsvoraussetzung, dass die ursprüngliche Sequenz (E) im Fall $N \neq E$ spaltet.

(e) Ist $N = E$, so ist Z ein Normalteiler in E. Zeige, dass die durch (E) induzierte Sequenz

$$1 \longrightarrow H/Z \longrightarrow E/Z \xrightarrow{\rho} G \longrightarrow 1 \tag{E/Z}$$

exakt ist. und begründe kurz, wieso die Induktionsvoraussetzung impliziert, dass diese Sequenz spaltet.

(f) Wähle für die Sequenz (E/Z) einen Homomorphismus $\tau\colon G \to E/Z$ mit $\rho\tau = \mathrm{id}_G$. Betrachte nun die Einschränkung der kanonischen Projektion $\mathrm{can}\colon E \to E/Z$ auf das Urbild der Untergruppe $\tau(G) \subseteq E/Z$ und die zugehörige kurze exakte Sequenz. Vollende damit den Beweis des Satzes von Schur und Zassenhaus.

Abgabe bis spätestens Montag, den 25. 11. 2019, um 14:00 Uhr. Werfen Sie Ihre Lösungsvorschläge in die dafür vorgesehenen Einwurfkästen vor dem Zeichensaal in Gebäude E 2 5. Abgabe zu dritt ist möglich. Bitte geben Sie Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer an!

---

[4] langen, aber sehr schönen Aufgabe
[5] Eine Untergruppe heißt charakteristisch, wenn sie unter jedem Gruppenautomorphismus invariant ist (vgl. Blatt 4 A1 a)).