UNIVERSITÄT DES SAARLANDES

Fachrichtung Mathematik
Prof. Dr. Gabriela Weitze-Schmithüsen
Dr. Tobias Columbus
Christian Steinhart

Algebra

Übungsblatt 6

Aufgabe 1 (4 Punkte)
Sei R ein kommutativer Ring mit Eins und $S \subseteq R$ eine multiplikativ abgeschlossene Teilmenge. Zeige folgende Aussagen:

a) Sei I ein Ideal, welches maximal mit der Eigenschaft $S \cap I = \varnothing$ ist. Dann ist I bereits ein Primideal.

b) Es gibt ein Ideal I wie in a), genau dann, wenn $0 \notin S$ gilt.

c) Sei $\mathcal{P}$ die Menge der Primideale von R. Dann ist

$$\bigcap_{P \in \mathcal{P}} P = \sqrt{(0)} := \{x \in R \mid \exists n \in \mathbb{N} : x^n = 0\}.$$

d) Für jedes Ideal $I \subseteq R$ gilt

$$\bigcap_{I \subseteq P \in \mathcal{P}} P = \sqrt{I} := \{x \in R \mid \exists n \in \mathbb{N} : x^n \in I\}.$$

Aufgabe 2 (4+2 Bonus - Punkte)
Sei k ein Körper.

a) Sei weiterhin A eine kommutative k-Algebra mit Eins und $k[X_1, \ldots, X_n]$ der Polynomring über n Variablen. Zeige, dass es für jede Abbildung $\phi\colon \{X_1, \ldots X_n\} \to A$ genau einen Algebrenhomomorphismus $\hat{\phi}\colon k[X_1, \ldots, X_n] \to A$ mit $\hat{\phi}(X_i) = \phi(X_i)$ gibt.
2 Bonuspunkte, wenn du daraus eine Adjunktion von Funktoren machst.

b) Sei $S := \{X^n \mid n \in \mathbb{N}_0\} \subseteq k[X]$. Zeige, dass $S^{-1}k[X] \cong k[X, Y]/(XY - 1)$ gilt.

Aufgabe 3 (4 Punkte)
Bestimme alle $a \in \mathbb{Z}$, so dass das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} x &\equiv 3 \mod a \\ x &\equiv 6 \mod 10 \\ x &\equiv a \mod 5 \end{aligned}$$

eine Lösung $x \in \mathbb{Z}$ besitzt und gib gegebenenfalls die Lösungen in Abhängigkeit von a an.

Aufgabe 4 (4 Punkte)
Sei R ein kommutativer Ring mit Eins und $\mathcal{M}$ die Menge der maximalen Ideale in R. Dann bezeichnet $\mathrm{Jac}(R) := \bigcap_{M \in \mathcal{M}} M$ das Jacobsson-Ideal.

a) Zeige, dass $\mathrm{Jac}(R) = \{x \in R \mid \forall\, y \in R : 1 - xy \in R^\times\}$ gilt.

b) Sei M ein endlich erzeugter R-Modul, $N \subseteq M$ ein Untermodul und $I \subseteq \mathrm{Jac}(R)$ ein Ideal. Beweise das Nakayama-Lemma, d.h. aus $M = IM + N$ folgt bereits $M = N$.

Abgabe bis spätestens Montag, den 02.12, um 12:00 Uhr. Werfen Sie Ihre Lösungsvorschläge in die dafür vorgesehenen Einwurfkästen vor dem Zeichensaal in Gebäude E 2 5. Abgabe zu dritt ist möglich. Bitte geben Sie Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer an!