Fachrichtung Mathematik
Prof. Dr. Gabriela Weitze-Schmithüsen
Dr. Tobias Columbus
Christian Steinhart

Algebra

Übungsblatt 7

Aufgabe 1 (4 Punkte)
Sei R ein kommutativer, faktorieller Ring mit Eins und $S \subseteq R$ eine multiplikativ abgeschlossene Menge.

a) Sei $a \in R \setminus S$ irreduzibel. Zeige dass dann $\frac{a}{1}$ auch in $S^{-1}R$ irreduzibel ist.

b) Zeige, dass auch $S^{-1}R$ ein faktorieller Ring ist. Was sind seine irreduziblen Elemente?

c) Wir wissen, dass $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ kein faktorieller Ring ist und $3 \in \mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ irreduzibel. Sei $S := \{2^k \mid k \in \mathbb{N}_0\}$. Zeige, dass $\frac{3}{1} \in S^{-1}\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ nicht irreduzibel ist.

Aufgabe 2 (3 Punkte)

a) Sei R ein faktorieller Ring und F ein freier R-Modul. Zeige, dass jedes Element $x \in F \setminus \{0\}$ bis auf Assoziiertheit[1] nur endlich viele Teiler hat, d.h. die Menge $\{\lambda \in R \mid \exists y \in F : \lambda y = x\}/\sim$ ist endlich.

b) Sei R ein Hauptidealring und F ein endlich erzeugter R-Modul. Sei $B \subset F$ eine linear unabhängige Menge. Zeige, dass sich B genau dann zu einer Basis von F ergänzen lässt, wenn $F/ < B >$ torsionsfrei ist.

Aufgabe 3 (4 Punkte)
Für einen Ring R heißt ein R-Modul P projektiv, wenn jede kurze exakte Sequenz

$$0 \to M \to N \to P \to 0$$

von R-Moduln spaltet.

a) Zeige, dass alle freien R-Moduln projektiv sind.

b) Sei $0 \to M \to N \to P \to 0$ eine kurze exakte Sequenz von R-Moduln. Zeige, dass die Sequenz genau dann spaltet, wenn $N \cong M \oplus P$ gilt.

c) Zeige, dass ein R-Modul P genau dann projektiv ist, wenn er direkter Summand eines freien Moduls [2] ist.

d) Sei nun R ein Hauptidealring. Zeige, dass alle endlich erzeugten[3] projektiven R-Moduln frei sind.

[1] Zwei Elemente $x, y \in R$ heißen assoziiert, wenn ein $\varepsilon \in R^\times$ mit $\varepsilon x = y$ existiert. Wir schreiben dann $x \sim y$.
[2] Das heißt es gibt einen freien Modul F mit Untermodul U und $F = U \oplus P$.
[3] Das geht eigentlich genauso gut auch für nicht endlich erzeugte.

Aufgabe 4 (5 Punkte)
Gegeben sei die die Baer-Specker Gruppe der Folgen in $\mathbb{Z}$ mit punktweiser Addition

$$\mathbb{Z}^{\mathbb{N}} := \{(a_1, a_2, \dots) \mid a_i \in \mathbb{Z}\}.$$

Wir möchten durch Widerspruch zeigen, dass $\mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$ keine freie abelsche Gruppe[4] ist. Sei ab nun angenommen, dass $\mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$ frei und $J \subset \mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$ eine Basis von $\mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$ ist.

a) Sei $e_i := (0, \dots, 0, 1, 0, \dots) \in \mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$ das Element, das nur an der i-ten Stelle eine 1 hat und sonst Nullen. Für $j \in J$ sei die Projektion π_j durch $\pi_j : \mathbb{Z}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{Z}$, $\sum_{i \in J} \lambda_i i \mapsto \lambda_j$ gegeben und $I := \{j \in J \mid \exists i \in \mathbb{N} : \pi_j(e_i) \neq 0\}$. Zeige, dass I und damit auch ihr Erzeugnis $E :=< I >$ abzählbar sind und E die endlichen Folgen in $\mathbb{Z}$ enthält.

b) Zeige, dass die Abbildung $\phi : \mathbb{Z}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$, $(a_1, a_2, \dots) \mapsto (a_1, a_1a_2, a_1a_2a_3, \dots)$ injektiv ist.

c) Sei $a := (a_1, a_2, \dots) \in \mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$ eine Folge mit $a_i \notin \{0, \pm 1\}$.
Zeige, dass das Bild $[\phi(a)] \in \mathbb{Z}^{\mathbb{N}}/E$ unendlich viele Teiler hat.

d) Mach dir klar, dass $\mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$ und damit auch J überabzählbar sind. Folgere hieraus, dass ein $a \in \mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$ wie in Teil c) mit $[\phi(a)] \neq 0$ existiert.

e) Zeige, dass wenn $\mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$ frei wäre, auch $\mathbb{Z}^{\mathbb{N}}/E$ frei wäre und führe dies zu einem Widerspruch.

Abgabe bis spätestens Montag, den 09.12, um 12:00 Uhr. Werfen Sie Ihre Lösungsvorschläge in die dafür vorgesehenen Einwurfkästen vor dem Zeichensaal in Gebäude E 2 5. Abgabe zu dritt ist möglich. Bitte geben Sie Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer an!

[4]Freie abelsche Gruppen sind gerade die freien $\mathbb{Z}$-Moduln.