UNIVERSITÄT DES SAARLANDES

Fachrichtung Mathematik
Prof. Dr. Gabriela Weitze-Schmithüsen
Dr. Tobias Columbus
Christian Steinhart

Algebra

Übungsblatt 9

Aufgabe 1 (4 Punkte)
Sei $q = p^n$ für eine Primzahl $p \in \mathbb{N}$ und $n \in \mathbb{N}$.

a) Zeige, dass es einen Körper mit q Elementen gibt.

b) Zeige, dass je zwei Körper F und K mit q Elementen zueinander isomorph sind.

Wir schreiben daher ab jetzt für den Körper mit q Elementen $\mathbb{F}_q$.

Aufgabe 2 (4 Punkte)

a) Sei $K_3|K_2$ eine endliche Körpererweiterung mit Basis $\{b_1, \ldots, b_n\}$ und $K_2|K_1$ eine endliche Körpererweiterung mit Basis $\{c_1, \ldots, c_m\}$. Zeige, dass dann $\{b_i c_j \mid 1 \le i \le n, 1 \le j \le m\}$ eine Basis von $K_3|K_1$ ist.

b) Sei K ein Körper und $K_1 := K(\alpha_1, \ldots, \alpha_k)$ und $K_2 := K(\beta_1, \ldots, \beta_l)$ zwei algebraische Körpererweiterungen mit teilerfremden Graden $[K_1 : K] = n$ und $[K_2 : K] = m$. Zeige, dass dann $[K(\alpha_1, \ldots, \alpha_k, \beta_1, \ldots, \beta_l) : K] = nm$ gilt.

c) Sei $L|K$ eine endliche Körpererweiterung von Grad n und $f \in K[X]$ ein irreduzibles Polynom von Grad m. Zeige: Sind n und m teilerfremd, dann ist f auch in $L[X]$ irreduzibel.

Aufgabe 3 (6 Punkte)

a) Bestimme jeweils den Grad der folgenden Körpererweiterungen über $\mathbb{Q}$:

   (i) $\mathbb{Q}[\sqrt{2} \cdot \sqrt[3]{3}]$

   (ii) $\mathbb{Q}[\sqrt{3} + \sqrt{5}, \sqrt{3} - \sqrt{5}]$

   (iii) der algebraische Abschluss $\overline{\mathbb{Q}} := \{\alpha \in \mathbb{C} \mid \alpha \text{ ist algebraisch über } \mathbb{Q}\}$

   (iv) der Zerfällungskörper $Z(X^6 - 6)$ über $\mathbb{Q}$

b) Seien α, β zwei algebraische Elemente über $\mathbb{F}_p$ und $[\mathbb{F}_p(\alpha) : \mathbb{F}_p] = n$ und $[\mathbb{F}_p(\beta) : \mathbb{F}_p] = m$ ihre Grade. Zeige, dass dann $[\mathbb{F}_p(\alpha, \beta) : \mathbb{F}_p] = \mathrm{kgV}(n, m)$ gilt.

Aufgabe 4 (2 Punkte)
Sei $K := \mathbb{F}_p(S, T)$ der Quotientenkörper des Polynomring von $\mathbb{F}_p[S, T]$ über zwei Variablen. Bestimme den Grad der Erweiterung $K[\sqrt[p]{S}, \sqrt[p]{T}]|K$ und zeige, dass die Erweiterung nicht einfach ist.

Aufgabe 5 (4 Bonus- Punkte)
Zeichne für $n = 4$ und 6 mit Zirkel und Lineal einen regelmäßigen Stern mit n Strahlen [1], dessen Innenkreis Radius 1 und dessen Außenkreis Radius 3 hat:

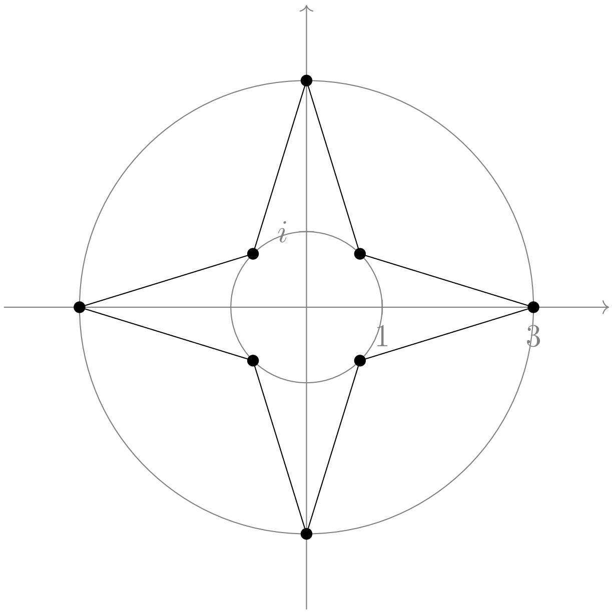

Abbildung 1: Stern mit 4 Strahlen und 8 Ecken.

Wir identifizieren nun $\mathbb{C}$ mit $\mathbb{R}^2$ und den Mittelpunkt des Kreises mit 0. Sei L der Körper der entsteht, wenn wir zu $\mathbb{Q}$ die Eckpunkte des Sterns dazunehmen. Welchen Grad hat die Körpererweiterung über $\mathbb{Q}$?

Abgabe bis spätestens Montag, den 06.01, um 12:00 Uhr. Werfen Sie Ihre Lösungsvorschläge in die dafür vorgesehenen Einwurfkästen vor dem Zeichensaal in Gebäude E 2 5. Abgabe zu dritt ist möglich. Bitte geben Sie Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer an!

[1] Das geht auch für $n = 5$, aber das ist schwieriger zu konstruieren.