UNIVERSITÄT DES SAARLANDES

Fachrichtung Mathematik
Prof. Dr. Gabriela Weitze-Schmithüsen
Dr. Tobias Columbus
Christian Steinhart

Algebra

Übungsblatt 10

Aufgabe 1 (4 Punkte)
Welche der folgenden Körpererweiterungen sind normal:

a) $\mathbb{Q}[\zeta_n] \mid \mathbb{Q}$, wobei $\zeta_n \in \mathbb{C}$ eine n-te Einheitswurzel bezeichnet.

b) $L \mid K$ eine beliebige Körpererweiterung von Grad 2.

c) $\mathbb{Q}[\sqrt[4]{2}] \mid \mathbb{Q}$

d) $\mathbb{Q}[\sqrt{2+\sqrt{2}}\,] \mid \mathbb{Q}$

e) $L \mid K$ eine algebraische Körpererweiterung über einem endlichen Körper K.

Aufgabe 2 (2 Punkte)
Sei K ein Körper und $L = Z(K[X])$ der Zerfällungskörper aller Polynome über K.
Zeige, dass L der algebraische Abschluss von K ist.

Aufgabe 3 (5 Punkte)
Gegeben seien die Körpererweiterungen $M \subset E, K \subset L$. Zeige oder widerlege die folgenden Aussagen:

a) Ist $L \mid M$ normal, dann ist auch $K \mid M$ normal.

b) Ist $L \mid M$ normal, dann ist auch $L \mid K$ normal.

c) Sind $L \mid K$ und $K \mid M$ normal, dann ist auch $L \mid M$ normal.

d) Sind $E \mid M$ und $K \mid M$ normal, dann ist auch $E \cap K \mid M$ normal.

e) Sind $E \mid M$ und $K \mid M$ normal, dann ist auch $EK \mid M$ normal. Hierbei bezeichnet $EK := E(K) := K(E) \subset L$ die Körpererweiterung von M in L, die von den Elementen aus E und K erzeugt wird. EK heißt *Komposition* von E und K.

Bitte wenden!

Aufgabe 4 (5 Punkte)
Wir wollen nun den Körper der konstruierbaren Zahlen anschauen. Für eine Punktemenge M in der Zahlenebene $\mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$ können wir folgende geometrische Objekte mit Zirkel und Lineal konstruieren:

- Geraden durch zwei Punkte
- Kreise um einen Punkt, dessen Radius die Entfernung von zwei Punkten ist
- Schnittpunkte von Geraden und/oder Kreisen liefern neue Punkte

Eine Zahl in $\mathbb{C}$ heißt aus M konstruierbar, wenn man sie nach endlich vielen Schritten von obiger Konstruktion als Schnittpunkt erhält. Insbesondere heißt eine Zahl *konstruierbar*, wenn sie aus $\{0, 1\}$ konstruierbar ist. Sei ab nun $M \subset \mathbb{C}$ eine Punktemenge mit $0, 1 \in M$. Wir wollen zeigen, dass die Menge der aus M konstruierbaren Zahlen ein Körper ist.

a) Sei $z = a + bi \in \mathbb{C}$. Zeige, dass z genau dann aus M konstruierbar ist, wenn a und b aus M konstruierbar sind. Zeige weiterhin, dass wir mit Zirkel und Lineal komplex konjugieren können.

b) Zeige, dass wir mit Zirkel und Lineal addieren und subtrahieren können.

c) Zeige, dass wir mit Zirkel und Lineal auch multiplizieren und dividieren können. Folgere hieraus, dass die Menge der konstruierbaren Zahlen eine Körpererweiterung von $\mathbb{Q}(M)$ ist.
Hinweis: Der Strahlensatz könnte hier helfen.

d) Sei K_M der Körper der aus M konstruierbaren Zahlen. Zeige, dass K_M alle Wurzeln enthält, d.h. für ein $z \in \mathbb{C}$ folgt aus $z^2 \in K_M$ bereits $z \in K_M$.
Hinweis: Hier hilft der Satz von Thales.

e) Gegeben sei eine Körperkette $F_0 := \mathbb{Q} \subseteq F_1 \subseteq F_2 \subseteq \dots$ mit $[F_i : F_{i-1}] = 2$ für alle $i \in \mathbb{N}$ und $F := \bigcup_{i \in \mathbb{N}} F_i \subseteq \mathbb{C}$. Zeige, dass jedes $z \in F$ konstruierbar ist.

Abgabe bis spätestens Montag, den 13.01.2020, um 12:00 Uhr. Werfen Sie Ihre Lösungsvorschläge in die dafür vorgesehenen Einwurfkästen vor dem Zeichensaal in Gebäude E 2 5. Abgabe zu dritt ist möglich. Bitte geben Sie Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer an!