UNIVERSITÄT DES SAARLANDES

Fachrichtung Mathematik
Prof. Dr. Gabriela Weitze-Schmithüsen
Dr. Tobias Columbus
Christian Steinhart

Algebra

Übungsblatt 11

Aufgabe 1 (4 Punkte)
Sei $p \in \mathbb{N}$ eine Primzahl. Bestimme jeweils den Separabilitätsgrad der folgenden Körpererweiterungen:

a) $\mathbb{Q}(\sqrt[42]{S})\ /\ \mathbb{Q}(S)$

b) $\mathbb{F}_7(\sqrt[42]{S})\ /\ \mathbb{F}_7(S)$

c) $\mathbb{F}_p(\sqrt[p]{S}, \sqrt[p]{T})\ /\ \mathbb{F}_p(S,T)$

d) $\mathbb{F}_{p^2}(\sqrt{S+T}, T)\ /\ \mathbb{F}_p(S,T)$

Aufgabe 2 (4 Punkte)

a) Sei K ein Körper, $f \in K[X]$ ein Polynom, f' die formale Ableitung von f und $\alpha \in \overline{K}$. Zeige, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:

  (i) α ist eine mehrfache Nullstelle von f

  (ii) $f(\alpha) = f'(\alpha) = 0$

  (iii) α ist Nullstelle von $\mathrm{ggT}(f, f')$.

b) Zeige, dass endliche Körper perfekt sind.

c) Sei K ein Körper mit Charakteristik p, der alle p-ten Wurzeln enthält, d.h. für $\alpha \in \overline{K}$ folgt aus $\alpha^p \in K$ bereits $\alpha \in K$. Zeige, dass K perfekt ist.

Aufgabe 3 (4 Punkte)
Gegeben seien die Körpererweiterungen $M \subset E, K \subset L$. Zeige oder widerlege die folgenden Aussagen:

a) Ist $L\ /\ M$ separabel, dann sind auch $K\ /\ M$ und $L\ /\ K$ separabel.

b) Sind $L\ /\ K$ und $K\ /\ M$ separabel, dann ist auch $L\ /\ M$ separabel.

c) Sind $E\ /\ M$ und $K\ /\ M$ separabel, dann ist auch $E \cap K\ /\ M$ separabel.

d) Sind $E\ /\ M$ und $K\ /\ M$ separabel, dann ist auch $EK\ /\ M$ separabel.

Aufgabe 4 (4+2 Bonus - Punkte)
Auf letztem Blatt haben wir den Körper der konstruierbaren Zahlen kennengelernt. Wir wollen nun mit dessen Hilfe zeigen, dass z.B. ein regelmäßiges 7-Eck nicht mit Zirkel und Lineal konstruierbar ist.

a) Sei $M \subseteq \mathbb{C}$ ein Teilkörper. Seien weiterhin S, T jeweils ein aus M konstruierter Kreis oder Gerade und $z \in \mathbb{C}$ ein Schnittpunkt von S und T. Zeige, dass es eine Kette von Körpererweiterungen $F_0 := M \subseteq F_1 \subseteq F_2 \subseteq \cdots \subseteq F_n \subseteq \mathbb{C}$ mit $z \in F_n$ und $[F_i : F_{i-1}] = 2$ gibt. Folgere hieraus, dass Aufgabe 4 e) von letztem Blatt eine Äquivalenz ist, d.h. es gilt: $z \in \mathbb{C}$ ist genau dann aus M konstruierbar, wenn es eine Kette von Körpererweiterungen $F_0 := M \subseteq F_1 \subseteq F_2 \subseteq \cdots \subseteq F_n \subseteq \mathbb{C}$ mit $z \in F_n$ und $[F_i : F_{i-1}] = 2$ gibt.
Hinweis: Eventuell hilft es in der ersten Körpererweiterung $i \in \mathbb{C}$ dazuzunehmen.

b) Zeige, dass man kein regelmäßiges 7-Eck mit Zirkel und Lineal konstruieren kann.

c) Zeige, dass $\sin(3\alpha) = 3\sin(\alpha) - 4(\sin(\alpha))^3$ für $\alpha \in \mathbb{R}$ gilt . Nutze dies um zu zeigen, dass wir im Allgemeinen Winkel mit Zirkel und Lineal nicht dreiteilen können.
Erinnerung: Wir kennen noch die Additionstheoreme $\sin(\alpha+\beta) = \sin(\alpha)\cos(\beta)+\cos(\alpha)\sin(\beta)$ *und* $\cos(\alpha + \beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) - \sin(\alpha)\sin(\beta)$ *aus der Analysis.*

Abgabe bis spätestens Montag, den , um 14:00 Uhr. Werfen Sie Ihre Lösungsvorschläge in die dafür vorgesehenen Einwurfkästen vor dem Zeichensaal in Gebäude E 2 5. Abgabe zu dritt ist möglich. Bitte geben Sie Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer an!