UNIVERSITÄT DES SAARLANDES

Fachrichtung Mathematik
Prof. Dr. Gabriela Weitze-Schmithüsen
Dr. Tobias Columbus
Christian Steinhart

Algebra

Übungsblatt 12

Aufgabe 1 (3 Punkte)
Sei $L \,/\, K$ eine galoissche Körpererweiterung und E_1, E_2 zwei Zwischenkörper, d.h. es gilt $K \subseteq E_1, E_2 \subseteq L$. Seien weiterhin $G_1 := \mathrm{Gal}(L \,/\, E_1), G_2 := \mathrm{Gal}(L \,/\, E_2)$. Zeige die folgenden Aussagen:

a) $E_1 \subseteq E_2 \iff G_1 \supseteq G_2$

b) $E_1 E_2 = L^{G_1 \cap G_2}$

c) Für die von G_1 und G_2 erzeugte Untergruppe gilt: $< G_1, G_2 >= \mathrm{Gal}(L \,/\, E_1 \cap E_2)$.

Aufgabe 2 (1 Punkte)
Sei $f \in \mathbb{R}[X]$ ein Polynom mit einer komplexen Nullstelle $z \in \mathbb{C}$. Zeige, dass dann auch ihr komplex konjugiertes $\overline{z}$ eine Nullstelle von f ist.

Aufgabe 3 (4 Punkte)
Bezeichne wie immer $\zeta_5 := e^{2\pi i/5} \in \mathbb{C}$ die fünfte primitive Einheitswurzel. Bestimme alle Zwischenkörper der Körpererweiterung $\mathbb{Q}(\sqrt[5]{5}, \zeta_5) \,/\, \mathbb{Q}$. Welche davon sind normal?

Aufgabe 4 (4 Punkte)
Sei $p \in \mathbb{N}$ eine Primzahl und L ein Körper von Charakteristik p. Sei weiterhin für $q := p^k$ mit $k \in \mathbb{N}$ die Frobeniusabbildung

$$\mathrm{Frob}_q : L \to L \quad , \quad \lambda \mapsto \lambda^q$$

gegeben.

a) Zeige, dass Frob_q ein Körperhomomorphismus ist.

b) Bestimme den Fixkörper $\mathrm{Fix}(\mathrm{Frob}_q) := \{x \in K \mid \mathrm{Frob}_q(x) = x\}$ von Frob_q.

c) Sei nun zusätzlich L endlich und $K \subseteq L$ ein Teilkörper. Mach dir nochmal klar, dass die Körpererweiterung $L \,/\, K$ galoissch ist, und bestimme ihre Galoisgruppe.

Bitte wenden!

Aufgabe 5 (4 Punkte)

a) Sei $M \subseteq \mathbb{C}$ ein Körper und K_M der Körper der aus M konstruierbaren Zahlen. Zeige, dass die Körpererweiterung $K_M \ / \ M$ normal ist.
Hinweis: Hier hilft das letzte Übungsblatt.

b) Sei $M \subseteq \mathbb{C}$ ein Körper und $z \in \mathbb{C}$. Zeige, dass z genau dann über M konstruierbar ist, wenn es eine galoissche Körpererweiterung $L \ / \ M$ mit $z \in L$ und $[L : M] = 2^k$ gibt.
Hinweis: Hier könnte Beispiel II.3.12 aus dem Skript helfen.

c) Sei $n \in \mathbb{N}$. Zeige, dass ein regelmäßiges n-Eck genau dann mit Zirkel und Lineal konstruierbar ist, wenn $\varphi(n) = 2^k$ gilt.

Abgabe bis spätestens Montag, den 27.01, um 14:00 Uhr. Werfen Sie Ihre Lösungsvorschläge in die dafür vorgesehenen Einwurfkästen vor dem Zeichensaal in Gebäude E 2 5. Abgabe zu dritt ist möglich. Bitte geben Sie Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer an!