UNIVERSITÄT DES SAARLANDES

Fachrichtung Mathematik
Prof. Dr. Gabriela Weitze-Schmithüsen
Dr. Tobias Columbus
Christian Steinhart

Algebra

Übungsblatt 13

Aufgabe 1 (4 Punkte)
Sei $L|K$ eine endliche Galois-Erweiterung.

a) Sei $H \leq \mathrm{Gal}(L|K)$ eine Untergruppe und L^H der zugehörige Fixkörper. Sei weiterhin $\{x_1, \ldots, x_n\} \subseteq L$ eine K-Vektorraum-Basis von L.
Zeige, dass dann bereits $L^H = K(SP_{L|L^H}(x_1), \ldots, SP_{L|L^H}(x_n))$ gilt.

b) Zeige, dass eine K-VR-Basis $\{x_1, \ldots, x_n\} \subseteq L$ von L mit $SP_{L|K}(x_i x_j) \neq 0 \iff i = j$ existiert.

Aufgabe 2 (4 Punkte)

a) Sei K ein Körper, $L = K(\alpha)$ eine einfache algebraische Körpererweiterung und $f \in K[X]$ das Minimalpolynom von α. Zeige, dass $f(x) = N_{L|K}(x - \alpha)$ für jedes $x \in K$ gilt.

b) Sei K ein endlicher Körper und L eine endliche Körpererweiterung. Was bzw. wie groß ist der Kern der Normabbildung $N_{L|K}$, d.h. das Urbild von 1_K? Was folgt daraus für das Bild?

Aufgabe 3 (4 Punkte)
Gegeben seien die algebraischen Körpererweiterungen $M \subseteq E, K \subseteq L$. Zeige die folgenden Aussagen:

a) Sind $E, K \;/\; M$ auflösbare Körpererweiterungen, dann sind auch die Körpererweiterungen $E \cap K \;/\; M$ und $E \cdot K \;/\; M$ auflösbar.

b) Ist $L \;/\; M$ auflösbar, dann sind auch $K \;/\; M$ und $L \;/\; K$ auflösbar.

c) Sind $L \;/\; K$ und $K \;/\; M$ auflösbar, dann ist auch $L \;/\; M$ auflösbar.

d) Gelten die obigen Aussagen auch, wenn wir „durch Radikale auflösbar“ anstatt „auflösbar“ betrachten?

Aufgabe 4 (4 Punkte)

a) Sei $f(X) = \sum_{i=0}^{n} \lambda_i X^i \in \mathbb{Q}[X]$ ein Polynom und $\varepsilon > 0$. Zeige, dass es ein irreduzibles Polynom $g(X) \in \mathbb{Q}[X]$ nahe an $f(X)$ gibt, d.h. es gilt $g(X) = \sum_{i=0}^{n} \mu_i X^i$ mit $|\mu_i - \lambda_i| < \varepsilon$ für alle $i \in \{1, \dots, n\}$.
Hinweis: Eisenstein und Marmor bricht.

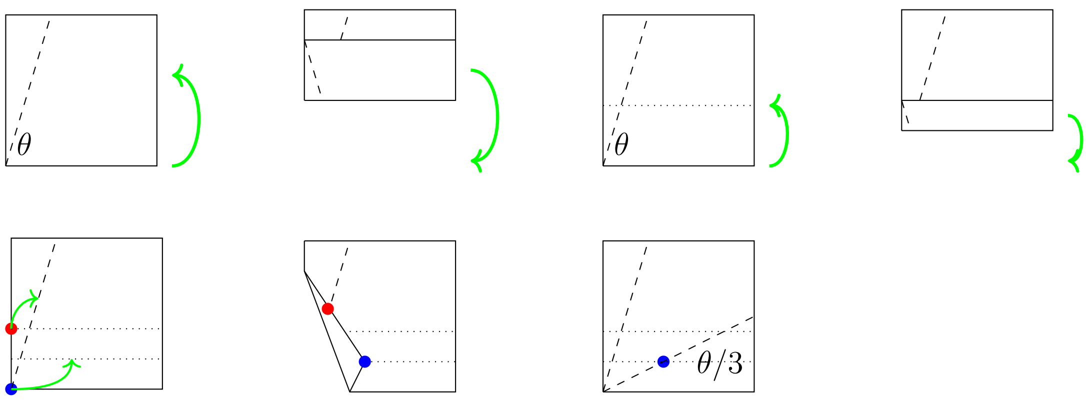
b) Zeige, dass es ein irreduzibles Polynom $f(X) \in \mathbb{Q}[X]$ von Grad p mit genau zwei komplexen Nullstellen gibt.

c) Sei $f(X) \in \mathbb{Q}[X]$ ein Polynom wie in b) und $\deg(f) = p$ eine Primzahl. Sei weiterhin $K = Z(f)$ sein Zerfällungskörper. Zeige, dass die Galoisgruppe $\mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q}) = S_p$ die symmetrische Gruppe ist.

d) Zeige, dass jede endliche Gruppe als Galoisgruppe einer Körpererweiterung auftritt.

Aufgabe 5 (4 Bonus - Punkte)

Wir wollen nun einen beliebigen Winkel θ mittels Falten/Origamis dreiteilen. Sei dazu der Winkel $\theta < 90°$ wie bei Bild 1 als Winkel einer Geraden und der Grundseite gegeben. Wir falten entsprechend der Bilder:



Zuerst falten wir die untere Kante parallel nach oben und halbieren diese durch nochmaliges Falten (Bilder 1-4). Anschließend falten wir die linke Ecke so hinein, dass die Ecke (blauer Punkt) auf der unteren Parallelen liegt und der Endpunkt der oberen Parallele (roter Punkt) auf der Geraden von Winkel θ (Bilder 5 und 6). Wir markieren den Punkt, auf den die Ecke gefaltet wurden und falten wieder auf.
Zeige, dass die Gerade durch die Ecke und den markierten Punkt (Bild 7) den Winkel $\theta/3$ zur unteren Blattkante hat.
Hinweis: Verwende ähnliche Dreiecken.

Abgabe bis spätestens Montag, den 03.02, um 14:00 Uhr. Werfen Sie Ihre Lösungsvorschläge in die dafür vorgesehenen Einwurfkästen vor dem Zeichensaal in Gebäude E 2 5. Abgabe zu dritt ist möglich. Bitte geben Sie Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer an!