Universität des Saarlandes
FR 6.1 Mathematik
Prof. Dr. G. Weitze-Schmithüsen
M.Sc. M. Kany
M.Sc. C. Steinhart

Fasnetübungsblatt zur Linearen Algebra I

Aufgabe 1.

Seien X, Y zwei Mengen. Auf der Menge der Abbildungen $\mathrm{Abb}(X, Y)$ von X nach Y haben wir folgende Relationen gegeben.

$$f R g :\iff \exists\ \phi \in \mathrm{Abb}(X, X) \text{ mit } f = g \circ \phi$$
$$f L g :\iff \exists \text{ bijektives } \psi \in \mathrm{Abb}(Y, Y) \text{ mit } f = \psi \circ g$$

Geben Sie jeweils mit Begründung an, ob es sich bei L bzw. R um eine Äquivalenzrelation handelt und bestimmen Sie gegebenenfalls die Anzahl der Äquivalenzklassen für $X = \{1, 2, 3\}$ und $Y = \{1, 2, 3, 4\}$.

Aufgabe 2.

Gegeben sei das Gleichungssystem:

$$\begin{aligned}
2ax_2 + 4x_3 + (a+1)x_5 &= 9\\
ax_2 + 2x_3 + (a-1)x_4 &= 4\\
2x_1 - ax_2 - 2x_3 + (a-1)x_4 - (2a+2)x_5 &= 0\\
x_1 - ax_2 - 2x_3 + (a+1)x_5 &= 0
\end{aligned}$$

Lösen Sie das Gleichungssystem über $\mathbb{R}$ in Abhängigkeit von $a \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 3.

Wir betrachten den Vektorraum der Abbildungen $\mathrm{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ mit punktweiser Verknüpfung.

a) Welche der folgenden Mengen sind Untervektorräume?

(i) $V_1 := \{f \in \mathrm{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid \forall\ x \in \mathbb{R}\ : f(x) \geq 0\}$

(ii) $V_2 := \{f \in \mathrm{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid \forall\ x \in \mathbb{R}\ : f(x) = -f(-x)\}$

(iii) $V_3 := \{f \in \mathrm{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid \forall\ x \in \mathbb{R}\ : f(x) \cdot f(-x) \geq 0\}$.

(iv) $V_4 := \{f \in \mathrm{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid f \text{ ist injektiv }\}$

b) Welche der folgenden Abbildungen sind linear? Bestimmen Sie gegebenenfalls ihr Bild und ihren Kern:

(i) $\phi : \mathrm{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \to \mathrm{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \quad , \quad f \mapsto \phi(f) \quad \text{mit } \phi(f)(x) = f(x) + f(-x)$

(ii) $\psi : \mathrm{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \to \mathrm{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \quad , \quad f \mapsto f \circ f$

Aufgabe 4.

a) Geben Sie zwei verschiedene Matrizen in Stufenform in $\mathbb{R}^{5\times 4}$ von Rang 3 an. Was ist jeweils die Dimension des Kerns? Sind die beiden Matrizen ähnlich?

b) Seien nun $A, B \in \mathbb{R}^{5\times 4}$ zwei Matrizen von Rang 4. Zeigen Sie, dass dann eine Matrix $S \in \mathrm{GL}_5(\mathbb{R})$ mit $A = SB$ existiert. Geht das auch, wenn A und B Rang 3 haben?

c) Sei V ein $\mathbb{R}$-Vektorraum mit geordneter Basis $B = (b_1|b_2|b_3)$ und $\Phi : V \to V$ eine lineare Abbildung mit Abbildungsmatrix

$$D_{BB}(\Phi) = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & l \end{pmatrix},$$

mit reellen Zahlen $a, b, c, d, e, f, g, h, l \in \mathbb{R}$.
Geben Sie die Abbildungsmatrix $D_{B'B'}(\Phi)$ von Φ bezüglich der geordneten Basis $B' = (b_2|b_3|b_1)$ an und bestimmen Sie eine Matrix S mit $D_{BB} = S \cdot D_{B'B'} \cdot S^{-1}$.

Aufgabe 5.

a) Geben Sie jeweils (mit einer Begründung) an, ob es sich bei den folgenden Abbildungen um Gruppenhomomorphismen handelt:

(i)

$$\phi : (\mathbb{Z}, +) \to (\mathrm{GL}_4(\mathbb{R}), \cdot) \quad , \quad k \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2k & 0 \\ 0 & 1 & 0 & k \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\psi : (\mathbb{Z}, +) \to (\mathbb{R}^{4\times 4}, +) \quad , \quad k \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & k \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

b) Für $\sigma \in S_n$ definieren wir die Matrix $A_\sigma = (a_{i,j})$ mit

$$a_{i,j} = \begin{cases} 1 & , \text{ falls } j = \sigma(i) \\ 0 & , \text{ sonst} \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass die Abbildung

$$\iota : S_n \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \quad , \quad \sigma \mapsto A_\sigma$$

wohldefiniert und ein Gruppenhomomorphismus ist.

Aufgabe 6.

Sei $n \in \mathbb{N}$ eine natürliche Zahl. Wir betrachten den Vektorraum $\mathbb{R}^{n\times n}$ der $n \times n$-Matrizen über $\mathbb{R}$.

a) Für eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ sei die Abbildung

$$\phi_A : \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}^{n\times n} \quad , \quad B \mapsto A \cdot B$$

gegeben. Zeigen Sie, dass ϕ_A eine lineare Abbildung ist. Wann ist ϕ_A eine Bijektion?

b) Gegeben sei die Basis

$$E := (\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix})$$

Bestimmen Sie die Abbildungsmatrix $D_{EE}(\phi_A)$ für $A := \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ und die Determinante von ϕ_A.

c) Bestimmen Sie die Dimension des Kerns $\mathrm{Kern}(\phi_A)$ in Abhängigkeit des Ranges von A.

Aufgabe 7.

Sei $E = \{e_1, e_2, e_3\}$ die Standardbasis des $\mathbb{R}^3$.

a) Zeigen Sie: $b_1 = e_1 + e_2$, $b_2 = e_1 - e_3$ und $b_3 = e_2$ sind linear unabhängig.

b) Bestimmen Sie die Inverse der Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

c) Gegeben sei das lineare Gleichungssystem $A \cdot x = b$. Bestimmen Sie $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ und $b \in \mathbb{R}^3$ so, dass $\mathbb{L}_h := \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \rangle$ die homogene Lösungsmenge und $x_s := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ eine spezielle Lösung des linearen Gleichungssystem sind.

Aufgabe 8.

Seien V, W zwei endlich-dimensionale K-Vektorräume.

a) Seien weiterhin $V_1, V_2 \subset V$ zwei Untervektorräume die sich trivial schneiden, d.h. es gilt $V_1 \cap V_2 = \{\underline{0}\}$, und für $i = 1, 2$ jeweils

$$\phi_i : V_i \to W$$

eine lineare Abbildung. Zeigen Sie, dass dann eine lineare Abbildung $\phi : V \to W$ existiert, sodass $\phi_i = \phi|_{V_i}$ gilt. Wann ist ϕ eindeutig bestimmt?

b) Sei $\phi : V \to W$ eine surjektive lineare Abbildung. Zeigen Sie, dass dann $V \cong W \times \mathrm{Kern}(\phi)$ gilt.

Aufgabe 9.

Gegeben seien die zwei drei-dimensionalen Vektorräume:

$$V := \left\langle \begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\\5\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}4\\3\\2\\1\\0\end{pmatrix} \right\rangle$$

$$W := \left\langle \begin{pmatrix}3\\3\\1\\1\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\-1\\0\\-2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\2\\3\\4\\4\end{pmatrix} \right\rangle$$

a) Bestimmen Sie $\dim(W + V)$ und $\dim(W \cap V)$.

b) Geben Sie eine Basis von $W + V$ und $\mathbb{R}^5/(W + V)$ an.

c) Geben Sie eine lineare Abbildung $\phi : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^5$ mit $\phi(V) = W$ und deren Abbildungsmatrix $D_{BC}(\phi)$ bezüglich Basen B, C Ihrer Wahl an.

Aufgabe 10.

Sei V ein K-Vektorraum und $\phi \in \mathrm{End}(V)$ ein Endomorphismus mit $\phi^2 = 4 \cdot \mathrm{id}_V$.

a) Zeigen Sie, dass ϕ bijektiv ist.

b) Zeigen Sie, dass alle Vektoren in $\mathrm{Bild}(\phi + 2 \cdot \mathrm{id}_V)$ Eigenvektoren zum Eigenwert 2 sind.

c) Zeigen Sie, dass $\mathrm{Bild}(\phi + 2 \cdot \mathrm{id}_V)$ und $\mathrm{Kern}(\phi + 2 \cdot \mathrm{id}_V)$ zwei Untervektorräume sind, die sich trivial schneiden, d.h. es gilt $\mathrm{Bild}(\phi + 2 \cdot \mathrm{id}_V) \cap \mathrm{Kern}(\phi + 2 \cdot \mathrm{id}_V) = \{\underline{0}\}$.

d) Folgern Sie, dass ϕ diagonalisierbar ist. Was sind die möglichen Eigenwerte von ϕ?