Universität des Saarlandes
FR 6.1 Mathematik
Prof. Dr. G. Weitze-Schmithüsen
M.Sc. M. Kany

Ferien Knobel-Blatt zur Linearen Algebra I

Aufgabe 1.

(a) Seien X, Y nicht-leere Mengen und $f\colon X \to Y$ eine Abbildung. Es sei eine Relation „$\sim$“ auf X definiert durch

$$x_1 \sim x_2 :\Longleftrightarrow f(x_1) = f(x_2).$$

Zeigen Sie folgende Aussagen:

(i) Durch „$\sim$“ wird eine Äquivalenzrelation auf X definiert.

(ii) Die Abbildung $\tilde{f}\colon X_\sim \to Y,\ [x]_\sim \mapsto f(x)$ ist wohldefiniert und injektiv.

(b) Es sei $V = \mathbb{R}^n$, $W = \mathbb{R}^m$ und $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ eine relle $m \times n$-Matrix. Wir definieren $\varphi_A\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ durch $\varphi_A(v) = A \cdot v$.

(i) Zeigen Sie, dass die Mengen $U_1 = \{v \in V \mid \varphi_A(v) = 0_W\}$ und $U_2 = \mathrm{Bild}(\varphi_A)$ Untervektorräume von $(V, +, \cdot, 0_V)$ beziehungsweise $(W, +, \cdot, 0_W)$ sind.

(ii) Zeigen Sie, dass durch $v_1 \sim v_2 :\Leftrightarrow (v_1 - v_2) \in U_1$ eine Äquivalenzrelation auf V definiert wird.

(iii) Zeigen Sie, dass durch $V_\sim \to U_2$, $[v]_\sim \mapsto \varphi_A(v)$ eine wohldefinierte bijektive Abbildung definiert wird.

Lösung 1.

(a) (i) **Reflexivität:**
Für alle $x \in X$ gilt $f(x) = f(x)$ und damit die Reflexivität.
Symmetrie: Gilt für $x, y \in X$ die Identität $f(x) = f(y)$, so auch die Identität $f(y) = f(x)$.
Transitivität:
Sind $x, y, z \in X$ mit $f(x) = f(y)$ und $f(y) = f(z)$, so folgt auch $f(x) = f(z)$.

(ii) **Wohldefiniertheit:** Sind $x, y \in [x]_\sim$ Repräsentanten der gleichen Äquivalenzklasse $[x]_\sim \in X_\sim$, so gilt $x \sim y$, also $f(x) = f(y)$ nach Definition.
Injektivität: Es seien $x, y \in X$ Repräsentanten der Restklassen $[x]_\sim, [y]_\sim \in X_\sim$, sodass $\tilde{f}([x]_\sim) = \tilde{f}([y]_\sim)$ gilt. Nach Definition von $\tilde{f}$ folgt die Identität $f(x) = f(y)$. Wir schließen $x \sim y$ und damit $[x]_\sim \cap [y]_\sim \neq \emptyset$. Da „$\sim$“ eine Partition auf X definiert folgt $[x]_\sim = [y]_\sim$.

(b) (i)
- Es gilt $A \cdot 0_V = 0_W$ und damit $0_V \in U_1$ und $0_W \in U_2$
- Es seien $x_1, x_2 \in U_1$. Dann gilt $A \cdot (x_1 + x_2) = A \cdot x_1 + A \cdot x_2 = 0_W$. Sind $y_1, y_2 \in U_2$, so existieren $x_1, x_2 \in V$ mit $y_1 = A \cdot x_1$ und $y_2 = A \cdot x_2$. Dann folgt $y_1 + y_2 = A \cdot (x_1 + x_2) \in U_2$.

- Es sei $\lambda \in \mathbb{R}$. Ist $x \in U_1$ so gilt $A \cdot (\lambda \cdot x) = \lambda \cdot A \cdot x = 0_W$ und damit $\lambda \cdot x \in U_1$. Ist $y \in U_2$, so existiert ein $x \in V$ mit $y = A \cdot x$. Dann gilt aber $\lambda \cdot y = A \cdot (\lambda \cdot x) \in U_2$.

(ii) **Reflexivität:**
Für alle $v \in V$ gilt $(v - v) = 0_V \in U_1$
Symmetrie:
Sind $v, w \in V$ mit $(v - w) \in U_1$ so folgt auch $(w - v) = (-1)(v - w) \in U_1$, da U_1 ein Untervektorraum ist.
Transitivität:
Es seien $v, w, u \in V$ mit $(v - w) \in U_1$ und $w - u \in U_1$ dann folgt aber auch $v - u = (v - w) + (w - v) \in U_1$, da U_1 ein Untervektorraum ist.

(iii) Die Injektivität der Abbildung folgt aus Teil (a) (ii): Denn sind $v, w \in V$ mit $\varphi_A(v) = \varphi_A(w)$, so ist dies genau dann der Fall, wenn $A \cdot v = A \cdot w$, also $A \cdot (v - w) = 0_W$ gilt. Dies ist äquivalent zu $v - w \in U_1$.
Die Surjektivität ist klar, denn ist $w \in \mathrm{Bild}(\varphi_A)$, so existiert ein $v \in V$ mit $w = \varphi_A(v)$. So folgt $[v]_\sim \mapsto \varphi_A(v) = w$.

Aufgabe 2.

Seien X, Y nicht-leere Mengen.

(a) Auf $\mathrm{Abb}(X, Y)$ definieren wir wie folgt Relationen $\mathfrak{R}_1, \mathfrak{R}_2$. Für $f, g \in \mathrm{Abb}(X, Y)$ gilt:

$$\begin{aligned} f\mathfrak{R}_1 g &\iff \exists h \in \mathrm{Abb}(Y, Y) : h \circ f = g \text{ und } h \text{ ist bijektiv} \\ f\mathfrak{R}_2 g &\iff \exists h \in \mathrm{Abb}(X, X) : f \circ h = g \end{aligned}$$

Geben Sie jeweils an ob $\mathfrak{R}_1$ bzw. $\mathfrak{R}_2$ eine Äquivalenzrelation definieren.

(b) Zeigen Sie für die Relationen aus Teil (a), dass alle surjektiven Abbildungen unter $\mathfrak{R}_2$ in Relation stehen.

Lösung 2.

(a) **Reflexivität:**
Die Relationen $\mathfrak{R}_1$ und $\mathfrak{R}_2$ sind reflexiv, denn sei $f \in \mathrm{Abb}(X, Y)$ dann gilt für die bijektiven Identitäts-Abbildungen $\mathrm{id}_Y \in \mathrm{Abb}(Y, Y)$ und $\mathrm{id}_X \in \mathrm{Abb}(X, X)$: $\mathrm{id}_Y \circ f = f$ und $f \circ \mathrm{id}_X = f$ und damit $f\mathfrak{R}_1 f$, sowie $f\mathfrak{R}_2 f$.
Symmetrie:
Die Relation $\mathfrak{R}_1$ ist symmetrisch, denn für $f, g \in \mathrm{Abb}(X, Y)$ und bijektives $h \in \mathrm{Abb}(X, Y)$ mit $h \circ f = g$ folgt $f = h^{-1} \circ g$, wobei $h^{-1} \in \mathrm{Abb}(Y, Y)$ die Umkehrabbildung von h bezeichnet.
Die Relation $\mathfrak{R}_2$ ist nicht symmetrisch. Betrachte dazu die Mengen $X = Y = \{1, 2\}$ und $f, g \colon X \to Y$ definiert durch $f(1) := 1$, $f(2) := 2$, sowie $g(1) := 1 =: g(2)$. Dann gilt für $h \in \mathrm{Abb}(X, X)$ definiert durch $h(1) := 1 =: h(2)$ die Identität $f \circ h = g$ Aber wegen $\mathrm{Bild}(g) = \{1\} \neq \{1, 2\} = \mathrm{Bild}(f)$ existiert kein $\tilde{h} \in \mathrm{Abb}(X, X)$ mit $f = g \circ \tilde{h}$.
Transitivität
Die Relationen $\mathfrak{R}_1$ und $\mathfrak{R}_2$ sind beide Transitiv, denn sind f, g, h in $\mathrm{Abb}(X, Y)$ mit $f\mathfrak{R}_i g$ und $g\mathfrak{R}_i h$ für $i = 1$ beziehungsweise $i = 2$, dann existieren bijektive Abbildungen $\varphi, \tilde{\varphi} \in \mathrm{Abb}(Y, Y)$ beziehungsweise Abbildungen $\psi, \tilde{\psi} \in \mathrm{Abb}(X, X)$ mit $\varphi \circ f = g$ und $\tilde{\varphi} \circ g = h$, beziehungsweise $f \circ \psi = g$ und $g \circ \tilde{\psi} = h$. Dann ist $\tilde{\varphi} \circ \varphi \in \mathrm{Abb}(Y, Y)$ wieder bijektiv und es gilt $\tilde{\varphi} \circ \varphi = h$. Beziehungsweise für die Abbildung $\psi \circ \tilde{\psi} \in \mathrm{Abb}(X, X)$ gilt $f \circ \psi \circ \tilde{\psi} = h$.

(b) Es seien $f, g \in \mathrm{Abb}(X, Y)$ zwei surjektive Abbildungen. Dann existiert zu f eine Rechtsinverse $\varphi \in \mathrm{Abb}(Y, X)$ mit $f \circ \varphi = \mathrm{id}_Y$. Für $h := \varphi \circ g \in \mathrm{Abb}(X, X)$ gilt dann mit der Assoziativität der Komposition:

$$f \circ h = (f \circ \varphi) \circ g = \mathrm{id}_Y \circ g = g.$$

Aufgabe 3.

(a) Es sei $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$ eine reelle $n \times m$ Matrix, sodass $A(i, j) \in \mathbb{Z}$ gilt für alle $i \in \{1, \ldots, n\}$ und $j \in \{1, \ldots, m\}$. Zeigen Sie: Ist $A \cdot x = \underline{0}$ lösbar für ein $x \in \mathbb{R}^m \setminus \{\underline{0}\}$, so existiert auch eine Lösung $x_0 \in \mathbb{Z}^m \setminus \{\underline{0}\}$ mit $A \cdot x_0 = \underline{0}$.

(b) Es sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine relle $n \times n$ Matrix. Zeigen Sie, dass man eindeutige Matrizen $B, C \in \mathbb{R}^{n \times n}$ finden kann mit $B = B^t$ und $C = -C^t$, sodass $A = B + C$ gilt.

Lösung 3.

(a) Da A eine Matrix mit ganzzahligen Einträgen ist, existiert nach dem Gauß-Algorithmus eine Matrix $T \in \mathbb{Q}^{n \times n}$, sodass $T \cdot A$ in Treppenform ist. Die Matrix T ist rational, da man mit Zeilen-Umformungen (Addieren, Vertauschen, Multiplizieren mit Inversen) nicht aus $\mathbb{Q}^{n \times n}$ herauskommen kann.
Da $A \cdot x = \underline{0}$ für ein $x \in \mathbb{R}^m \setminus \{\underline{0}\}$ gilt, muss $\mathrm{Rang}(T \cdot A) < n$ gelten. Somit existiert auch eine Lösung $x_0 \in \mathbb{Q}^m \setminus \{\underline{0}\}$ mit $A \cdot x_0 = \underline{0}$. Und ist $c \in \mathbb{Z}$ das gemeinsame Vielfache der Zähler, der Komponenten von x_0, so gilt $c \cdot x_0 \in \mathbb{Z}^m$ mit $A \cdot c \cdot x_0 = \underline{0}$.

(b) Definiere

$$B := \frac{1}{2} \cdot A + \frac{1}{2} \cdot A^t \quad \text{und} \quad C := \frac{1}{2} \cdot A - \frac{1}{2} \cdot A^t.$$

Nun gilt $B^t = B$ und $C^t = -C$, sowie $A = B + C$.

Aufgabe 4.

Wir haben zwei Axiome gegeben:

DC: Ist X eine nicht-leere Menge und $\mathfrak{R} \subseteq X \times X$ eine Relation, sodass für alle $x \in X$ ein $y \in X$ existiert mit $(x, y) \in \mathfrak{R}$, dann existiert eine Abbildung $f \colon \mathbb{N}_0 \to X$ mit $f(n) \mathfrak{R} f(n+1)$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$.

und

CC: Ist V ein System von Mengen (d.h. eine Menge von Mengen) und $F \colon \mathbb{N} \to V$ eine Abbildung, sodass $F(n)$ ungleich der leeren Menge ist für alle $n \in \mathbb{N}$, dann existiert eine Abbildung $f \colon \mathbb{N} \to \bigsqcup_{n \in \mathbb{N}} F(n)$ mit $f(n) \in F(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Zeigen Sie folgende Aussagen:

(i) Aus **DC** folgt **CC**. *Hinweis: Erzwingen Sie einfach die Abbildung, wie Sie sie brauchen durch eine Relation.*

(ii) Das Axiom **CC** impliziert, dass zu jeder unendlichen Menge M eine injektive Abbildung $\varphi\colon \mathbb{N} \to M$ existiert.
Hinweis: Es könnte nützlich sein zu erst eine Abbildung auf die Menge der $V_n := \{A \subset M|\ \#(A) = n\}$ zu betrachten. Dabei ist $\#(A)$ die Anzahl der Elemente in A.

Lösung 4.

(i) Es sei V ein System von Mengen (d.h. eine Menge von Mengen) und $F\colon \mathbb{N} \to V$ eine Abbildung, sodass $F(n)$ ungleich der leeren Menge ist für alle $n \in \mathbb{N}$.
Setze nun $X = \bigsqcup_{n\in\mathbb{N}} V_n$, wobei $V_n := \{(n, v)|v \in F(n)\}$ $(n \in \mathbb{N})$. Definiere eine Relation $\mathfrak{R} \subseteq X \times X$ durch $(n, v)\mathfrak{R}(k, w)$, falls $k = n + 1$ gilt. Insbesondere ist dann $w \in F(n + 1)$.
Da für alle $n \in \mathbb{N}$ nach Voraussetzung $F(n) \neq \emptyset$ gilt, existiert eine Abbildung $f_0\colon \mathbb{N} \to X$ mit $f_0(n)\mathfrak{R}f_0(n + 1)$ für alle $n \in \mathbb{N}$.
Sei $k \in \mathbb{N}$ mit $f_0(1) \in V_k$, das heißt $f_0(1) = (k, v_k)$ mit $x_k \in F(k)$. Nach Konstruktion der Relation $\mathfrak{R}$ gilt $f_0(2) = (k + 1, v_{k+1})$ mit $v_{k+1} \in F(k + 1)$. Es folgt induktiv für alle $n \in \mathbb{N}$ nach Konstruktion der Relation:

$$f_0(n) = (n, v_n) \in V(k + n - 1) \quad \text{für ein} \quad v_n \in F(n).$$

Wähle für $1 \leq n \leq k-1$ beliebige Elemente $v_n \in F(n)$ und definiere die Projektionsabbildung $\pi\colon X \to \bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n$ durch $\pi(m, w) = w$. Definiere abschließend $f\colon \mathbb{N} \to X$ durch $f(n) := v_n$ für $1 \leq n < k$ und $f(n) := \pi \circ f_0(n + 1 - k)$ für $n \geq k$.

(ii) Es sei M eine unendliche Menge. Dann gilt $V_n = \{A \subset M|\ \#(A) = n\} \neq \emptyset$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Es sei nun $F_0\colon \mathbb{N} \to \{V_n|\ n \in \mathbb{N}\}$ definiert durch $F_0(n) := V_n$. Nach Voraussetzung existiert eine Abbildung $F_1\colon \mathbb{N} \to \bigsqcup_{n\in\mathbb{N}} V_n$ mit $F_1(n) \in V_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$.
Definiere nun $A_n := F_1(2^n)$ und $M_n := A_n \setminus \bigcup_{i=1}^{n-1} A_i$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt für die Anzahl der Elemente von M_n mit Hilfe der geometrischen Summenformel:

$$\#(M_n) \geq \#(A_n) - \sum_{i=0}^{n-1} \#(A_i) = 2^n - \sum_{i=0}^{n-1} 2^i \geq 1.$$

Außerdem sind die Mengen $M_n \subseteq M$ $(n \in \mathbb{N})$ nach Konstruktion paarweise disjunkt. Nun definiere $F_2\colon \mathbb{N} \to \{M_n|\ n \in \mathbb{N}\}$ durch $F_2(n) := M_n \neq \emptyset$. Dann existiert wieder nach Voraussetzung eine Abbildung $f\colon \mathbb{N} \to M$ mit $f(n) \in M_n$ und f ist injektiv, da die M_n $(n \in \mathbb{N})$ nach Konstruktion paarweise leeren Schnitt haben.