Universität des Saarlandes
FR 6.1 Mathematik
Prof. Dr. G. Weitze-Schmithüsen
M.Sc. M. Kany
M.Sc. C. Steinhart

1. Übungsblatt zur Linearen Algebra II

Eigenräume, charakteristisches Polynom, Cayley-Hamilton, Algebren, invariante Komplementärunterräume

Während des gesamten Blattes sei K ein Körper und $n \in \mathbb{N}$ eine natürliche Zahl.

Aufgabe 1. ((Alleine) 3P+1P)

Gegeben seien die Matrizen

$$A := \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

a) Bestimmen Sie das charakteristische Polynom, die Eigenwerte und alle Eigenräume von A, B und B^2 über $\mathbb{R}$ und $\mathbb{F}_5$.

b) Sei $C \in K^{n \times n}$ und $f(X) \in K[X]$ ein Polynom. Zeigen Sie: Ist $\lambda \in K$ ein Eigenwert von C, dann ist $f(\lambda)$ ein Eigenwert von $f(C)$. Erhalten wir alle Eigenwerte von $f(C)$ auf diese Art?

Aufgabe 2. ((Gruppe) 1,5P+1,5P+1P)

Wir betrachten wieder den reellen Vektorraum $\mathbb{R}[X]$ der reellen Polynome und die Ableitung

$$\phi : \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}[X] \quad , \quad f(X) = \sum_{i=0}^{n} \lambda_i X^i \mapsto f'(X) := \sum_{i=1}^{n} i\lambda_i X^{i-1}$$

als Endomorphismus von $\mathbb{R}[X]$.

a) Zeigen Sie, dass für jedes Polynom $f(X) \in \mathbb{R}[X] \setminus \{0\}$ der Endomorphismus $f(\phi) \neq 0$ nicht die Nullabbildung ist.

b) Zeigen Sie, dass die Untervektorräume $P_n := \{f \in \mathbb{R}[X] \mid \deg(f) \leq n\}$ der Polynome von Grad kleiner-gleich $n \in \mathbb{N}$ bereits alle nichttrivialen ϕ-invarianten Unterräume von $\mathbb{R}[X]$ sind.

c) Folgern Sie aus Teil b), dass ein nichttrivialer ϕ-invarianter Unterraum von $\mathbb{R}[X]$ kein ϕ-invariantes Komplement besitzt.

Das Übungsblatt kann bis spätestens Donnerstag den 22. 04. 2021 vor der Saalübung abgegeben werden. Schreiben Sie Namen und Matrikelnummer aller Gruppenmitglieder sowie Ihre Übungsgruppe gut lesbar auf Ihre Abgabe. Es dürfen bis zu drei Personen gemeinsam in einer Übungsgruppe sein.

Aufgabe 3. ((Gruppe) 4P)

Sei V ein $\mathbb{R}$-Vektorraum und $\phi \in \mathrm{End}(V)$ ein Endomorphismus mit:

$$(\phi^3 + \phi - \mathrm{id}_V)(\phi^2 + \mathrm{id}_V) = 0$$

Seien weiterhin $U := \mathrm{Kern}(\phi^3 + \phi - \mathrm{id}_V)$ und $W := \mathrm{Kern}(\phi^2 + \mathrm{id}_V)$.

a) Zeigen Sie, dass U und W ϕ-invariant sind.

b) Zeigen Sie, dass $\mathrm{Bild}(\phi^2 + \mathrm{id}_V) \subseteq U$ gilt.

c) Zeigen Sie, dass $(\phi^2 + \mathrm{id}_V)|_U$ ein Automorphismus ist.

d) Zeigen Sie, dass $V = U \oplus W$ gilt.
Hinweis: Betrachten Sie für ein beliebiges $v \in V$ das Bild $(\phi^2 + \mathrm{id}_V)(v)$. Finden Sie damit ein Element $u \in U$ mit $v - u \in \mathrm{Kern}(\phi^2 + \mathrm{id}_V) = W$.

Hinweis: In LA 1 haben wir auf Blatt 6 Aufgabe 2 a) gezeigt, dass ein ϕ wie oben ein Isomorphismus ist. Dies dürfen Sie ohne Beweis benutzen.

Aufgabe 4. ((Alleine) 4P)

a) Zeigen Sie, dass die Menge

$$Quat := \{ \begin{pmatrix} a & -b & -c & -d \\ b & a & -d & c \\ c & d & a & -b \\ d & -c & b & a \end{pmatrix} \mid a, b, c, d \in K \} \subset K^{4\times 4}$$

eine Unteralgebra von $K^{4\times 4}$ ist.

Die Quaternionen $Q := \{a + bi + cj + dk \mid a, b, c, d \in \mathbb{R}\}$ entstehen indem man, ähnlich wie bei den komplexen Zahlen $\mathbb{C}$, zu $\mathbb{R}$ die Elemente i, j, k mit

$$i^2 = j^2 = k^2 = -1 \text{ und } ij = -ji = k$$

dazunimmt. Mit den üblichen Multiplikationen und der üblichen Addition ist dann Q eine $\mathbb{R}$-Algebra (das brauchen Sie nicht zu zeigen).

b) Berechnen Sie die folgenden Terme:

(i) $(-3 + 3i + j + k) \cdot (1 - i - 2k)$

(ii) $(a + bi + cj + dk) \cdot (a - bi - cj - dk)$ für beliebige $a, b, c, d \in \mathbb{R}$

c) Zeigen Sie, dass die Abbildung

$$\iota : Q \to \mathbb{R}^{4\times 4} \quad , \quad a + bi + cj + dk \mapsto \begin{pmatrix} a & -b & -c & -d \\ b & a & -d & c \\ c & d & a & -b \\ d & -c & b & a \end{pmatrix}$$

ein Algebrenhomomorphismus ist.

Das Übungsblatt kann bis spätestens Donnerstag den 22. 04. 2021 vor der Saalübung abgegeben werden. Schreiben Sie Namen und Matrikelnummer aller Gruppenmitglieder sowie Ihre Übungsgruppe gut lesbar auf Ihre Abgabe. Es dürfen bis zu drei Personen gemeinsam in einer Übungsgruppe sein.